分子科学アーカイブス

AC0007

角運動量の公式（後編）

田中武彦　著

公開日　　　2007 年　 11 月　 30日 第１版

分子科学会編集委員会は、優れたテキストを分子科学アーカイブスとして公開しますが、その内容の一切の責任は著者にあります。読者からの貴重なご意見は、(edit-office@j-molsci.jp) で随時受け付けております。ご意見は編集委員会から著者にお伝えし、テキストの内容に反映していきます。

著者紹介

田中武彦（たなか　たけひこ）

所属： 九州大学名誉教授（理学研究院化学部門）

専門分野：　分子分光学

角運動量の公式（後編）

田中武彦

これは Vol. 1, No. 1 に掲載された「角運動量の公式（前編）」の続きです。前編に示した公式に対する証明を集めてあります。目次には、前編の内容も含めています。

目 次

第6章　証明の部

6.1　証明：対称コマ固有関数 [(2.130）式]

(2.127) 式から (2.130) 式を導くためには、

$$(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)^{J-K}[\exp(iJ\phi)\exp(iJ\chi)(1+\cos\theta)^J]$$
$$= (-1)^{J-K}\frac{(2J)!}{(J+K)!}\exp(iJ\phi)\exp(iK\chi)(1+\cos\theta)^{\frac{J+K}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{J-K}{2}} \tag{6.1}$$

が示せれば良い。このために、一般式

$$(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)\left[\exp(iJ\phi)\exp(iN\chi)(1+\cos\theta)^{\frac{J+N}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{J-N}{2}}\right]$$
$$= -(J+N)\exp(iJ\phi)\exp[i(N-1)\chi](1+\cos\theta)^{\frac{J+N-1}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{J-N+1}{2}} \tag{6.2}$$

を用いると便利である。この式は、$(\hat{J}_x+i\hat{J}_y)$ を１回演算すると [　] 内の関数の N が１減少し、かつ $-(J+N)$ 倍になることを示す。一方、(6.1) 式の $\exp(iJ\phi)\exp(iJ\chi)(1+\cos\theta)^J$ は一般式の [　] 内において $N=J$ とおいたものに相当する。よってこれに $(\hat{J}_x+i\hat{J}_y)$ を $J-K$ 回演算すれば、$N=K$ となり、$(-2J)(-2J+1)(-2J+2)\cdots(-J-K-1) = (-1)^{J-K}(2J)!/(J+K)!$ 倍になる。よって証明できた。

一般式の証明は以下のようである。

$$\hat{J}_x + i\hat{J}_y = \exp(-i\chi)\left[\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{i\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\chi}\right)\right] \tag{6.3}$$

だから

$$(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)\left[\exp(iJ\phi)\exp(iN\chi)(1+\cos\theta)^{\frac{J+N}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{J-N}{2}}\right]$$
$$= \exp(iJ\phi)\exp[i(N-1)\chi]\left[\frac{J+N}{2}(1+\cos\theta)^{\frac{J+N-2}{2}}(-\sin\theta)(1-\cos\theta)^{\frac{J-N}{2}}\right.$$
$$+\frac{J-N}{2}(1-\cos\theta)^{\frac{J-N-2}{2}}(\sin\theta)(1+\cos\theta)^{\frac{J+N}{2}}$$
$$\left.-\frac{1}{\sin\theta}(J-N\cos\theta)(1+\cos\theta)^{\frac{J+N}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{J-N}{2}}\right]$$
$$= \exp(iJ\phi)\exp[i(N-1)\chi](1+\cos\theta)^{\frac{J+N-1}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{J-N-1}{2}}$$
$$\times\left[\frac{J+N}{2}(\cos\theta-1) + \frac{J-N}{2}(\cos\theta+1) - J + N\cos\theta\right]$$

$$= \exp(iJ\phi)\exp[i(N-1)\chi](1+\cos\theta)^{\frac{J+N-1}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{J-N-1}{2}}(J+N)(\cos\theta-1)$$

$$= -(J+N)\exp(iJ\phi)\exp[i(N-1)\chi](1+\cos\theta)^{\frac{J+N-1}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{J-N+1}{2}} \tag{6.4}$$

よって、証明終り。ただし

$$\sin\theta = (1+\cos\theta)^{1/2}(1-\cos\theta)^{1/2} \tag{6.5}$$

に注意。

6.2 証明：対称コマ固有関数と回転行列 [(2.131）式]

$$f_{J,M,K}(\theta,\phi,\chi) = \exp(iM\phi)\exp(iK\chi)\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \tag{6.6}$$

とおく。これは、以下の関係を満足することを示すことができる。

$$\hat{J}_Z f_{J,M,K} = M f_{J,M,K} \tag{6.7}$$

$$\hat{J}_z f_{J,M,K} = K f_{J,M,K} \tag{6.8}$$

$$(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y) f_{J,M,K} = \sqrt{J(J+1)-M(M\pm 1)}\, f_{J,M\pm 1,K} \tag{6.9}$$

$$(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y) f_{J,M,K} = \sqrt{J(J+1)-K(K\mp 1)}\, f_{J,M,K\mp 1} \tag{6.10}$$

最初の 2 式は $\hat{J}_Z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$ および $\hat{J}_z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\chi}$ を直接演算してみれば直ちに明らかである。残りの 2 式の証明は後に譲る。(6.7–6.10) 式は、$f_{J,M,K}$ と $\Psi_{J,M,K}$ が比例関係にあること、すなわち a を M、K によらない定数として

$$\Psi_{J,M,K} = a\, f_{J,M,K} = a\exp(iM\phi)\exp(iK\chi)\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \tag{6.11}$$

が成り立つことを意味する。比例定数 a を決定するには、$M = K = J$、$\theta = \phi = \chi = 0$ とおいて両辺を比較するのが便利である。

$$\Psi_{J,J,J} = \frac{1}{2^J}\left(\frac{2J+1}{8\pi^2}\right)^{1/2}(1+\cos\theta)^J\exp(iJ\phi)\exp(iJ\chi) \xrightarrow{\theta=\phi=\chi=0} \left(\frac{2J+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \tag{6.12}$$

$$f_{J,J,J} = \exp(iJ\phi)\exp(iJ\chi)\langle J,J|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,J\rangle \xrightarrow{\theta=\phi=\chi=0} \langle J,J|J,J\rangle = 1 \tag{6.13}$$

よって

$$a = \left(\frac{2J+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \tag{6.14}$$

となる。これを (6.11) 式に入れれば、(2.131) 式となる。
　次に、(6.10) 式を確かめる。

$$(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y) f_{J,M,K}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pm \exp(\mp i\chi)\frac{\partial}{\partial\theta}\exp(iM\phi)\exp(iK\chi)\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&\quad -\exp(\mp i\chi)\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\exp(iM\phi)\exp(iK\chi)\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&\quad +\exp(\mp i\chi)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\chi}\exp(iM\phi)\exp(iK\chi)\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&= \exp(iM\phi)\exp[i(K\mp 1)\chi]\Bigg[\pm\frac{\partial}{\partial\theta}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&\quad -\frac{M}{\sin\theta}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle+\frac{K\cos\theta}{\sin\theta}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle\Bigg] \qquad (6.15)
\end{aligned}
$$

括弧内の各項は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\pm\frac{\partial}{\partial\theta}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle = \pm\langle J,K|\frac{\partial}{\partial\theta}\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&\quad = \pm i\langle J,K|\hat{j}_Y\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{M}{\sin\theta}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&\quad = -\frac{1}{\sin\theta}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle\langle J,M|\hat{j}_Z|J,M\rangle \\
&\quad = -\frac{1}{\sin\theta}\sum_{M'}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M'\rangle\langle J,M'|\hat{j}_Z|J,M\rangle \\
&\quad = -\frac{1}{\sin\theta}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)\hat{j}_Z|J,M\rangle \\
&\quad = -\frac{1}{\sin\theta}\langle J,K|(\cos\theta\hat{j}_Z-\sin\theta\hat{j}_X)\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{K\cos\theta}{\sin\theta}\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&\quad = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\langle J,K|\hat{j}_Z|J,K\rangle\langle J,K|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&\quad = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sum_{K'}\langle J,K|\hat{j}_Z|J,K'\rangle\langle J,K'|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&\quad = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\langle J,K|\hat{j}_Z\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

これらを代入して

$$
(\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y)f_{J,M,K} = \exp(iM\phi)\exp[i(K\mp 1)\chi]\langle J,K|(\hat{j}_X\pm i\hat{j}_Y)\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp(iM\phi)\exp[i(K\mp 1)\chi] \\
&\quad \times \sum_{K'} \langle J,K|(\hat{j}_X \pm i\hat{j}_Y)|J,K'\rangle\langle J,K'|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&= \exp(iM\phi)\exp[i(K\mp 1)\chi] \\
&\quad \times \langle J,K|(\hat{j}_X \pm i\hat{j}_Y)|J,K\pm 1\rangle\langle J,K\mp 1|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&= \exp(iM\phi)\exp[i(K\mp 1)\chi] \\
&\quad \times \sqrt{J(J+1)-K(K\mp 1)}\langle J,K\mp 1|\exp(i\theta\,\hat{j}_Y)|J,M\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1)-K(K\mp 1)}\, f_{J,M,K\mp 1}
\end{aligned} \tag{6.19}
$$

よって、(6.10) 式は確かめられた。(6.9) 式も同様に証明できる。(6.16) 式と (6.17) 式の変形に関しては、以下のような補足を付け加えておく。

[補足]

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta}\exp(i\theta\hat{j}_Y) = \frac{d}{d\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\,\theta^k\,\hat{j}_Y^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\,k\,\theta^{k-1}\,\hat{j}_Y^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{k+1}}{k!}\,\theta^k\,\hat{j}_Y^{k+1} \\
&\quad = i\hat{j}_Y\exp(i\theta\hat{j}_Y) = i\exp(i\theta\hat{j}_Y)\hat{j}_Y
\end{aligned} \tag{6.20}
$$

また

$$
\begin{aligned}
&\exp(i\theta\hat{j}_Y)\hat{j}_Z\exp(-i\theta\hat{j}_Y) \\
&\quad = \left[1 + i\theta\hat{j}_Y + \frac{1}{2!}(i\theta\hat{j}_Y)^2 + \cdots\right]\hat{j}_Z\left[1 - i\theta\hat{j}_Y + \frac{1}{2!}(i\theta\hat{j}_Y)^2 - \cdots\right] \\
&\quad = \hat{j}_Z + \theta\,[i\hat{j}_Y,\hat{j}_Z] + \frac{1}{2!}\,\theta^2\,[i\hat{j}_Y,[i\hat{j}_Y,\hat{j}_Z]] + \frac{1}{3!}\,\theta^3\,[i\hat{j}_Y,[i\hat{j}_Y,[i\hat{j}_Y,\hat{j}_Z]]] + \cdots
\end{aligned} \tag{6.21}
$$

ところで

$$
[i\hat{j}_Y,\hat{j}_Z] = -\hat{j}_X \tag{6.22}
$$

$$
[i\hat{j}_Y,[i\hat{j}_Y,\hat{j}_Z]] = [i\hat{j}_Y,-\hat{j}_X] = -\hat{j}_Z \tag{6.23}
$$

$$
[i\hat{j}_Y,[i\hat{j}_Y,[i\hat{j}_Y,\hat{j}_Z]]] = [i\hat{j}_Y,-\hat{j}_Z] = \hat{j}_X \tag{6.24}
$$

などを代入すれば

$$
\begin{aligned}
&\exp(i\theta\hat{j}_Y)\,\hat{j}_Z\,\exp(-i\theta\hat{j}_Y) = \hat{j}_Z\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) - \hat{j}_X\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\
&\quad = \cos\theta\,\hat{j}_Z - \sin\theta\,\hat{j}_X
\end{aligned} \tag{6.25}
$$

上式の右から $\exp(i\theta\hat{j}_Y)$ を掛ければ

$$
\exp(i\theta\hat{j}_Y)\,\hat{j}_Z = (\cos\theta\,\hat{j}_Z - \sin\theta\,\hat{j}_X)\exp(i\theta\hat{j}_Y) \tag{6.26}
$$

を得る。また (6.25) 式の左から $\exp(-i\theta\hat{j}_Y)$ を掛け、その後 θ の符号を反転すれば

$$
\hat{j}_Z\exp(i\theta\hat{j}_Y) = \exp(i\theta\hat{j}_Y)(\cos\theta\,\hat{j}_Z + \sin\theta\,\hat{j}_X) \tag{6.27}
$$

が得られる。

6.3 対称コマ固有関数と回転行列の実例 [(2.131）式]

$J = 1/2$ の例

(2.131) 式の表現の理解を助けるため、簡単な例を挙げる。$J = 1/2$ とする。$\hat{j}_Y$ としては、１電子のスピンの成分 $\hat{s}_Y$ を使うことができる。よって、(2.131) 式は

$$\Psi_{1/2,M,K} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^{1/2} \exp(iM\phi)\exp(iK\chi)\langle 1/2, K|\exp(i\theta\,\hat{s}_Y)|1/2, M\rangle \tag{6.28}$$

となる。ここで、$|1/2, M\rangle$ 及び $|1/2, K\rangle$ は、スピンの固有関数 α、β のいずれかである。

$$|1/2, 1/2\rangle = \alpha \qquad\qquad |1/2, -1/2\rangle = \beta \tag{6.29}$$

α および β は次の関係を満足する。

$$\hat{s}_Y\alpha = \frac{i}{2}\beta \qquad\qquad \hat{s}_Y\beta = -\frac{i}{2}\alpha \tag{6.30}$$

よって

$$\hat{s}_Y^2\alpha = \frac{1}{4}\alpha \qquad\qquad \hat{s}_Y^2\beta = \frac{1}{4}\beta \tag{6.31}$$

上の式は、$\hat{s}_Y^2$ は 1/4 と等価であることを示す。ゆえに

$$\begin{aligned}
\exp(i\theta\,\hat{s}_Y) &= 1 + i\theta\hat{s}_Y + \frac{(i\theta\hat{s}_Y)^2}{2!} + \frac{(i\theta\hat{s}_Y)^3}{3!} + \frac{(i\theta\hat{s}_Y)^4}{4!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta\hat{s}_Y - \frac{1}{2!}\theta^2\hat{s}_Y^2 - \frac{i}{3!}\theta^3\hat{s}_Y^3 + \frac{1}{4!}\theta^4\hat{s}_Y^4 + \cdots \\
&= 1 + 2i\hat{s}_Y\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}2i\hat{s}_Y\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + \cdots \\
&= \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + \cdots\right] + 2i\hat{s}_Y\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \cos\frac{\theta}{2} + 2i\hat{s}_Y\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

さらに

$$\langle\alpha|\hat{s}_Y|\alpha\rangle = 0 \quad \langle\alpha|\hat{s}_Y|\beta\rangle = -\frac{i}{2} \quad \langle\beta|\hat{s}_Y|\alpha\rangle = \frac{i}{2} \quad \langle\beta|\hat{s}_Y|\beta\rangle = 0 \tag{6.33}$$

だから

$$\begin{aligned}
&\langle\alpha|\exp(i\theta\,\hat{s}_Y)|\alpha\rangle = \cos\frac{\theta}{2} \qquad\qquad \langle\alpha|\exp(i\theta\,\hat{s}_Y)|\beta\rangle = \sin\frac{\theta}{2} \\
&\langle\beta|\exp(i\theta\,\hat{s}_Y)|\alpha\rangle = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad\qquad \langle\beta|\exp(i\theta\,\hat{s}_Y)|\beta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{6.34}$$

これらを (6.28) 式に代入すれば

$$\Psi_{1/2,1/2,1/2} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}i\phi\right) \exp\left(\frac{1}{2}i\chi\right) \cos\frac{\theta}{2} \tag{6.35}$$

$$\Psi_{1/2,1/2,-1/2} = -\left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}i\phi\right) \exp\left(-\frac{1}{2}i\chi\right) \sin\frac{\theta}{2} \tag{6.36}$$

$$\Psi_{1/2,-1/2,1/2} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}i\phi\right) \exp\left(\frac{1}{2}i\chi\right) \sin\frac{\theta}{2} \tag{6.37}$$

$$\Psi_{1/2,-1/2,-1/2} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}i\phi\right) \exp\left(-\frac{1}{2}i\chi\right) \cos\frac{\theta}{2} \tag{6.38}$$

が得られる。

$J=1$ の例

$J=1$ の例を挙げる。$\hat{j}_Y$ としては、１粒子の軌道角運動量の成分

$$\hat{l}_Y = \frac{1}{i}\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \tag{6.39}$$

を使う。よって、(2.131) 式は

$$\Psi_{1,M,K} = \left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/2} \exp(iM\phi)\exp(iK\chi)\langle 1,K|\exp(i\theta\,\hat{l}_Y)|1,M\rangle \tag{6.40}$$

となる。ここで、$|1,M\rangle$ 及び $|1,K\rangle$ は、球面調和関数 $Y_{1,1}(\theta,\phi)$、$Y_{1,0}(\theta,\phi)$、$Y_{1,-1}(\theta,\phi)$ のいずれかである。行列要素 $\langle 1,M|\hat{l}_Y|1,M'\rangle$ のうちゼロでないものは $\langle 1,1|\hat{l}_Y|1,0\rangle = -i/\sqrt{2}$、$\langle 1,0|\hat{l}_Y|1,-1\rangle = -i/\sqrt{2}$、$\langle 1,0|\hat{l}_Y|1,1\rangle = i/\sqrt{2}$、$\langle 1,-1|\hat{l}_Y|1,0\rangle = i/\sqrt{2}$ である。よって、$J=1$ については $i\hat{l}_Y$ を次の行列で表すことができる。

$$i\hat{l}_Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.41}$$

これより

$$(i\hat{l}_Y)^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.42}$$

$$(i\hat{l}_Y)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.43}$$

よって

$$(i\hat{l}_Y)^3 = -i\hat{l}_Y \tag{6.44}$$

という等価関係が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}
\exp(i\theta\hat{l}_Y) &= 1 + \theta(i\hat{l}_Y) + \frac{\theta^2}{2!}(i\hat{l}_Y)^2 + \frac{\theta^3}{3!}(i\hat{l}_Y)^3 + \frac{\theta^4}{4!}(i\hat{l}_Y)^4 + \frac{\theta^5}{5!}(i\hat{l}_Y)^5 + \frac{\theta^6}{6!}(i\hat{l}_Y)^6 + \cdots \\
&= 1 + \theta(i\hat{l}_Y) + \frac{\theta^2}{2!}(i\hat{l}_Y)^2 - \frac{\theta^3}{3!}(i\hat{l}_Y) - \frac{\theta^4}{4!}(i\hat{l}_Y)^2 + \frac{\theta^5}{5!}(i\hat{l}_Y) + \frac{\theta^6}{6!}(i\hat{l}_Y)^2 - \cdots \\
&= 1 + (i\hat{l}_Y)\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) + (i\hat{l}_Y)^2\left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right) \\
&= 1 + (i\hat{l}_Y)\sin\theta + (i\hat{l}_Y)^2(1-\cos\theta) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & \sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ -\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta & \cos\theta & \sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta) & -\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

これより

$$\Psi_{1,0,0} = \left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/2}\cos\theta \tag{6.46}$$

$$\Psi_{1,\pm1,0} = \mp\left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/2}\exp(\pm i\phi)\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \tag{6.47}$$

$$\Psi_{1,0,\pm1} = \pm\left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/2}\exp(\pm i\chi)\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \tag{6.48}$$

$$\Psi_{1,\pm1,1} = \left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/2}\exp(\pm i\phi)\exp(i\chi)\frac{1}{2}(1\pm\cos\theta) \tag{6.49}$$

$$\Psi_{1,\pm1,-1} = \left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/2}\exp(\pm i\phi)\exp(-i\chi)\frac{1}{2}(1\mp\cos\theta) \tag{6.50}$$

が得られる。

6.4　証明：回転行列の直交性 [(2.139)、(2.140）式]

$$\sum_M D^J_{M',M}(\phi,\theta,\chi)\, D^J_{M'',M}(\phi,\theta,\chi)^*$$
$$= \sum_M \exp(-iM'\phi)\, d^J_{M',M}(\theta) \exp(-iM\chi) \exp(iM''\phi)\, d^J_{M'',M}(\theta)^* \exp(iM\chi)$$
$$= \exp(-iM'\phi) \exp(iM''\phi) \sum_M d^J_{M',M}(\theta)\, d^J_{M'',M}(\theta)^*$$
$$= \exp(-iM'\phi) \exp(iM''\phi)$$
$$\times \sum_M \langle J, M'| \exp(i\theta\, \hat{j}_Y)|J, M\rangle \langle J, M''| \exp(i\theta\, \hat{j}_Y)|J, M\rangle^*$$
$$= \exp(-iM'\phi) \exp(iM''\phi)$$
$$\times \sum_M \langle J, M'| \exp(i\theta\, \hat{j}_Y)|J, M\rangle \langle J, M| \exp(-i\theta\, \hat{j}_Y)|J, M''\rangle$$
$$= \exp(-iM'\phi) \exp(iM''\phi)\langle J, M'|J, M''\rangle = \delta_{M',M''} \tag{6.51}$$

よって、(2.139) 式は証明された。(2.140）式の証明も同様。

6.5　証明：対称コマ固有関数の複素共役 [(2.143）式]

$$f_{J,M,K} = (-1)^{M-K}\Psi_{J,-M,-K} \tag{6.52}$$

とおく。これは、明らかに以下の関係を満足する。

$$\hat{J}_Z f_{J,M,K} = -M f_{J,M,K} \tag{6.53}$$
$$\hat{J}_z f_{J,M,K} = -K f_{J,M,K} \tag{6.54}$$
$$(\hat{J}_X \mp i\hat{J}_Y) f_{J,M,K} = -\sqrt{J(J+1) - M(M\pm 1)}\, f_{J,M\pm1,K} \tag{6.55}$$
$$(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y) f_{J,M,K} = -\sqrt{J(J+1) - K(K\pm 1)}\, f_{J,M,K\pm1} \tag{6.56}$$

上の４つの式の複素共役をとる。$\hat{J}_X$、$\hat{J}_x$ などは複素共役をとると符号が反転することに注意すれば

$$\hat{J}_Z f^*_{J,M,K} = M f^*_{J,M,K} \tag{6.57}$$
$$\hat{J}_z f^*_{J,M,K} = K f^*_{J,M,K} \tag{6.58}$$
$$(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y) f^*_{J,M,K} = \sqrt{J(J+1) - M(M\pm 1)}\, f^*_{J,M\pm1,K} \tag{6.59}$$
$$(\hat{J}_x \mp i\hat{J}_y) f^*_{J,M,K} = \sqrt{J(J+1) - K(K\pm 1)}\, f^*_{J,M,K\pm1} \tag{6.60}$$

よって、直ちに

$$a\, f^*_{J,M,K} = \Psi_{J,M,K} \tag{6.61}$$

ここで、a は M、K に依存しない定数である。これより

$$\Psi^*_{J,M,K} = a^*\, f_{J,M,K} = a^*\, (-1)^{M-K}\Psi_{J,-M,-K} \tag{6.62}$$

$\theta = \phi = \chi = 0$、$M = K$ とおけば、$a = 1$ と定めることができる。

6.6 証明：対称コマ固有関数と Legendre 多項式 [(2.163) 式]

(2.130) 式に $M = K = 0$ を代入すれば

$$\Psi_{J,0,0} = \left(\frac{2J+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \frac{(-1)^J}{2^J\, J!}(\hat{J}_X - i\hat{J}_Y)^J (\sin\theta)^J \exp(iJ\phi) \tag{6.63}$$

が得られる。よって

$$(\hat{J}_X - i\hat{J}_Y)^J \exp(iJ\phi)(\sin\theta)^J = \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^J (\sin\theta)^{2J} \tag{6.64}$$

を示せば、(2.163) 式は証明されたことになる。上式を示すために $J \geq N \geq 1$ の任意の整数 N について成り立つ次の式を用意する。

$$\begin{aligned}
&(\hat{J}_X - i\hat{J}_Y)\left[\exp(iN\phi)(\sin\theta)^{-N}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N}(\sin\theta)^{2J}\right] \\
&\quad = \exp[i(N-1)\phi]\,(\sin\theta)^{-N+1}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N+1}(\sin\theta)^{2J}
\end{aligned} \tag{6.65}$$

証明は後に行うが、この式は $(\hat{J}_X - i\hat{J}_Y)$ を演算すると括弧内の式の N が 1 つ減少することを示す。また $N = J$ とおくと括弧内は (6.64) 式の左辺にある $\exp(iJ\phi)(\sin\theta)^J$ に等しくなることがわかる。(6.64) 式における $(\hat{J}_X - i\hat{J}_Y)$ の J 回の演算は、最初 J であった N の値を 0 にまで減少させるから、結果は (6.64) 式の右辺のようになる。

以下に (6.65) 式の証明を行う。$\hat{J}_X - i\hat{J}_Y$ をオイラー角で表せば

$$\hat{J}_X - i\hat{J}_Y = \exp(-i\phi)\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{i\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] \tag{6.66}$$

であるが、被演算関数は χ に依存しないので、χ での微分を含む項は省いても良い。よって

$$\begin{aligned}
&(\hat{J}_X - i\hat{J}_Y)\left[\exp(iN\phi)(\sin\theta)^{-N}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N}(\sin\theta)^{2J}\right] \\
&\quad = -\exp(-i\phi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[\exp(iN\phi)(\sin\theta)^{-N}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N}(\sin\theta)^{2J}\right] \\
&\quad = -\exp[i(N-1)\phi]\,\frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^{-N}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N}(\sin\theta)^{2J}\right] \\
&\qquad -N\exp[i(N-1)\phi]\,(\sin\theta)^{-N-1}\cos\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N}(\sin\theta)^{2J} \\
&\quad = -\exp[i(N-1)\phi]\,(\sin\theta)^{-N}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N}(\sin\theta)^{2J} \\
&\quad = \exp[i(N-1)\phi]\,(\sin\theta)^{-N+1}\frac{d}{-\sin\theta d\theta}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N}(\sin\theta)^{2J} \\
&\quad = \exp[i(N-1)\phi]\,(\sin\theta)^{-N+1}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{J-N+1}(\sin\theta)^{2J}
\end{aligned} \tag{6.67}$$

6.7　証明：対称コマ固有関数と球面調和関数 [(2.168）式]

(2.167) 式に $K=0$ を代入すれば

$$\Psi_{J,M,0} = \left[\frac{2J+1}{8\pi^2}\frac{(J-|M|)!}{(J+|M|)!}\right]^{1/2} (\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y)^{|M|}\, P_J(\cos\theta) \tag{6.68}$$

が得られる。よって

$$(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y)^{|M|} P_J(\cos\theta) = (-1)^{\frac{M+|M|}{2}} P_J^{|M|}(\cos\theta)\exp(iM\phi) \tag{6.69}$$

を示せば、(2.168）式は証明されたことになる。上式を示すために $N \geq 0$ の任意の整数 N について成り立つ次の式を用意する。

$$\begin{aligned}&(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y)\left[\exp(\pm iN\phi)(\sin\theta)^N \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^N P_J(\cos\theta)\right]\\ &= \mp\exp[\pm i(N+1)\phi]\,(\sin\theta)^{N+1}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{N+1} P_J(\cos\theta)\end{aligned} \tag{6.70}$$

証明は後に行うが、この式は $(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y)$ を演算すると括弧内の式の N が 1 つ増加し、かつ $\mp$ の符号が加わることを示す。また $N=0$ とおくと括弧内は $P_J(\cos\theta)$ に等しくなることがわかる。(6.69) 式における $(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y)$ の $|M|$ 回の演算は、最初 0 であった N の値を $|M|$ にまで増加させ、かつ $(\mp1)^{|M|}$ なる符合を付けるから

$$\begin{aligned}&(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y)^{|M|} P_J(\cos\theta) = (\mp1)^{|M|}\exp(\pm i|M|\phi)(\sin\theta)^{|M|}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|M|} P_J(\cos\theta)\\ &= (-1)^{\frac{M+|M|}{2}} P_J^{|M|}(\cos\theta)\exp(iM\phi)\end{aligned} \tag{6.71}$$

(6.70) 式を確かめる。

$$\begin{aligned}&(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y)\left[\exp(\pm iN\phi)(\sin\theta)^N \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^N P_J(\cos\theta)\right]\\
&= \pm\exp(\pm i\phi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \mp \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[\exp(\pm iN\phi)(\sin\theta)^N\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^N P_J(\cos\theta)\right]\\
&= \pm\exp[\pm i(N+1)\phi]\,\frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^N\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^N P_J(\cos\theta)\right]\\
&\quad \mp N\exp[\pm i(N+1)\phi]\,(\sin\theta)^{N-1}\cos\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^N P_J(\cos\theta)\\
&= \pm\exp[\pm i(N+1)\phi]\,(\sin\theta)^N\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^N P_J(\cos\theta)\\
&= \mp\exp[\pm i(N+1)\phi]\,(\sin\theta)^{N+1}\frac{d}{-\sin\theta d\theta}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^N P_J(\cos\theta)\\
&= \mp\exp[\pm i(N+1)\phi]\,(\sin\theta)^{N+1}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{N+1} P_J(\cos\theta)\end{aligned} \tag{6.72}$$

6.8 証明：Clebsch-Gordan 係数の具体的な値１［(3.31）式］

(3.38）式の漸化式において、$j = m = 0$、$j_2 = j_1$、$m_2 = -m_1 + 1$ とおき、上の符号をとれば

$$0 = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\langle j_1, m_1-1, j_1, -m_1+1|0,0\rangle + \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\langle j_1, m_1, j_1, -m_1|0,0\rangle \tag{6.73}$$

この式は、m_1 を 1 だけ変えると $\langle j_1, m_1, j_1, -m_1|0,0\rangle$ の絶対値は変化せず、符号が変わることを示す。よって

$$\begin{aligned}|\alpha, 0, 0\rangle = {}& \langle j_1, j_1, j_1, -j_1|0,0\rangle[|\alpha_1, j_1, j_1\rangle|\alpha_1, j_1, -j_1\rangle \\ & -|\alpha_1, j_1, j_1-1\rangle|\alpha_1, j_1, -j_1+1\rangle + |\alpha_1, j_1, j_1-2\rangle|\alpha_1, j_1, -j_1+2\rangle \\ & - \ldots + (-1)^{2j_1}|\alpha_1, j_1, -j_1\rangle|\alpha_1, j_1, j_1\rangle]\end{aligned} \tag{6.74}$$

$\langle j_1, j_1, j_1, -j_1|0,0\rangle$ は約束事により正である。右辺には全部で $2j_1 + 1$ 項あるので、規格化のためこの値は $(2j_1+1)^{-1/2}$ と定められる。

6.9 証明：Clebsch-Gordan 係数の具体的な値２［(3.33）式］

$m_1 = j_1$ の場合の符号は約束事により正である。次に（3.38）式の漸化式において、$m = j$、$m_2 = j - m_1 + 1$ とおき、上の符号をとれば

$$0 = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\langle j_1, m_1-1, j_2, j-m_1+1|j,j\rangle + \sqrt{j_2(j_2+1) - (j-m_1+1)(j-m_1)}\langle j_1, m_1, j_2, j-m_1|j,j\rangle \tag{6.75}$$

この式は、m_1 が 1 だけ変化すると $\langle j_1, m_1, j_2, j-m_1|j,j\rangle$ の符号が変わることを示す。上式より

$$\langle j_1, m_1-1, j_2, j-m_1+1|j,j\rangle = -\left[\frac{j_2(j_2+1) - (j-m_1+1)(j-m_1)}{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\right]^{1/2}\langle j_1, m_1, j_2, j-m_1|j,j\rangle \tag{6.76}$$

m_1 を $m_1 + 1$ に書きかえ、さらに平方根の中身を因数分解して

$$\langle j_1, m_1, j_2, j-m_1|j,j\rangle = -\left[\frac{(j_2+j-m_1)(j_2-j+m_1+1)}{(j_1+m_1+1)(j_1-m_1)}\right]^{1/2}\langle j_1, m_1+1, j_2, j-m_1-1|j,j\rangle \tag{6.77}$$

上式を繰り返し適用すると

$$\langle j_1, m_1, j_2, j-m_1|j,j\rangle = (-1)^{j_1-m_1}$$

$$\times\left[\frac{(j_1+j_2-j)!(j_2+j-m_1)!(j_1+m_1)!}{(-j_1+j_2+j)!(2j_1)!(j_2-j+m_1)!(j_1-m_1)!}\right]^{1/2}\langle j_1, j_1, j_2, j-j_1|j,j\rangle \tag{6.78}$$

$\langle j_1, j_1, j_2, j-j_1|j,j\rangle$ の符号は約束事により正にとられるが、絶対値はClebsch-Gordan 係数の規格化条件を満足するよう定められる。すなわち

$$\sum_{m_1}|\langle j_1, m_1, j_2, j-m_1|j,j\rangle|^2 = 1 \tag{6.79}$$

よって

$$\langle j_1, j_1, j_2, j-j_1|j,j\rangle^{-2} = \sum_{m_1}\frac{(j_1+j_2-j)!(j_2+j-m_1)!(j_1+m_1)!}{(-j_1+j_2+j)!(2j_1)!(j_2-j+m_1)!(j_1-m_1)!}$$

$$= \frac{(j_1+j_2+j+1)!(j_1-j_2+j)!}{(2j_1)!(2j+1)!} \tag{6.80}$$

これより

$$\langle j_1, j_1, j_2, j-j_1|j,j\rangle = \left[\frac{(2j_1)!(2j+1)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j_1-j_2+j)!}\right]^{1/2} \tag{6.81}$$

よって

$$\langle j_1, m_1, j_2, j-m_1|j,j\rangle = (-1)^{j_1-m_1}$$

$$\times\left[\frac{(2j+1)!(j_1+j_2-j)!(j_1+m_1)!(j_2+j-m_1)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j_1-j_2+j)!(-j_1+j_2+j)!(j_1-m_1)!(j_2-j+m_1)!}\right]^{1/2} \tag{6.82}$$

（補足）

（6.80）式の総和を計算するには、次の公式が必要である。

$$\sum_{\sigma}\frac{(a+\sigma)!(b-\sigma)!}{(c+\sigma)!(d-\sigma)!} = \frac{(a+b+1)!(a-c)!(b-d)!}{(c+d)!(a+b-c-d+1)!} \tag{6.83}$$

この公式は次のようにして証明できる。$0<x<1$ のとき

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{6.84}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^n \tag{6.85}$$

上式の右辺における x^r の係数は以下のように求められる。すなわち最初のカッコ内から x^{k_1} の項、次のカッコ内から x^{k_2} の項、3番目のカッコ内から x^{k_3} の項、... というふうにとり、これらを乗じれば $x^{k_1+k_2+\cdots+k_n}$ の項が得られる。よって x^r の係数は、$k_1+k_2+\cdots+k_n = r$ になるように $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ を選ぶことのできる場合の数に等しい。よって

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_r \binom{r+n-1}{n-1} x^r = \sum_r \frac{(r+n-1)!}{(r)!(n-1)!} x^r \tag{6.86}$$

次に $(1-x)^{-n}$ と $(1-x)^{-m}$ の積を展開したものの中の x^p の係数は、$(1-x)^{-n}$ を展開したものの中の x^r の係数と $(1-x)^{-m}$ を展開したものの中の x^{p-r} の係数の積を r について総和したものに等しい。またこれは、明らかに $(1-x)^{-(n+m)}$ を展開したものの中の x^p の係数に等しいから

$$\sum_r \frac{(r+n-1)!}{(r)!(n-1)!} \frac{(p-r+m-1)!}{(p-r)!(m-1)!} = \frac{(p+n+m-1)!}{(p)!(n+m-1)!} \tag{6.87}$$

整理して

$$\sum_r \frac{(r+n-1)!(p-r+m-1)!}{(r)!(p-r)!} = \frac{(p+n+m-1)!(n-1)!(m-1)!}{(p)!(n+m-1)!} \tag{6.88}$$

$r = c+\sigma$、$n = a-c+1$、$m = b+c-p+1$、$p = c+d$ なる置き換えをすれば

$$\sum_r \frac{(a+\sigma)!(b-\sigma)!}{(c+\sigma)!(d-\sigma)!} = \frac{(a+b+1)!(a-c)!(b-d)!}{(c+d)!(a+b-c-d+1)!} \tag{6.89}$$

6.10 証明：Clebsch-Gordan 係数の具体的な値３ [(3.34) 式]

$m = j$ の場合の合成角運動量の固有関数は

$$\begin{aligned} |\alpha, j, j\rangle &= c_0|\alpha_1, j_1, j_1\rangle|\alpha_2, j_2, j-j_1\rangle + c_1|\alpha_1, j_1, j_1-1\rangle|\alpha_2, j_2, j-j_1+1\rangle \\ &\quad + c_2|\alpha_1, j_1, j_1-2\rangle|\alpha_2, j_2, j-j_1+2\rangle + \ldots \end{aligned} \tag{6.90}$$

の形になるはずであるが、最初の係数 c_0 を正の実数にとるのが約束事である。c_0 は、すなわち $\langle j_1, j_1, j_2, j-j_1|j, j\rangle$ である。次に (3.38) 式の漸化式において、$m_1 = j_1$、$m_2 = m-j_1-1$ とおき、下の符号をとれば

$$\begin{aligned} &\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\langle j_1, j_1, j_2, m-j_1-1|j, m-1\rangle \\ &= \sqrt{j_2(j_2+1)-(m-j_1-1)(m-j_1)}\langle j_1, j_1, j_2, m-j_1|j, m\rangle \end{aligned} \tag{6.91}$$

この式は、m が変化しても $\langle j_1, j_1, j_2, m-j_1|j, m\rangle$ の符号が変わらず、すべて正であることを示す。上式より

$$\langle j_1, j_1, j_2, m-j_1-1|j, m-1\rangle$$

$$= \left[\frac{j_2(j_2+1)-(m-j_1-1)(m-j_1)}{j(j+1)-m(m-1)} \right]^{1/2} \langle j_1, j_1, j_2, m-j_1 | j, m \rangle \tag{6.92}$$

m を $m+1$ に書きかえ、さらに平方根の中身を因数分解して

$$\langle j_1, j_1, j_2, m-j_1 | j, m \rangle$$

$$= \left[\frac{(-j_1+j_2+m+1)(j_1+j_2-m)}{(j+m+1)(j-m)} \right]^{1/2} \langle j_1, j_1, j_2, m-j_1+1 | j, m+1 \rangle \tag{6.93}$$

上式を繰り返し適用すると

$$\langle j_1, j_1, j_2, m-j_1 | j, m \rangle$$

$$= \left[\frac{(-j_1+j_2+j)!(j_1+j_2-m)!(j+m)!}{(-j_1+j_2+m)!(j_1+j_2-j)!(2j)!(j-m)!} \right]^{1/2} \langle j_1, j_1, j_2, j-j_1 | j, j \rangle$$

$$= \left[\frac{(2j+1)(2j_1)!(-j_1+j_2+j)!(j_1+j_2-m)!(j+m)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j_1+j_2-j)!(j_1-j_2+j)!(-j_1+j_2+m)!(j-m)!} \right]^{1/2} \tag{6.94}$$

最後の行は（6.81）式より代入を行った。

6.11 証明：Clebsch-Gordan 係数の直交性 [(3.35）式]

$$\langle \alpha, j', m' | \alpha, j, m \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \tag{6.95}$$

一方

$$\langle \alpha, j', m' | \alpha, j, m \rangle = \sum_{m_1'} \sum_{m_2'} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j', m' \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle$$

$$\times \langle \alpha_1, j_1, m_1' | \alpha_1, j_1, m_1 \rangle \langle \alpha_2, j_2, m_2' | \alpha_2, j_2, m_2 \rangle$$

$$= \sum_{m_1'} \sum_{m_2'} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j', m' \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle \delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2, m_2'}$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j', m' \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle \tag{6.96}$$

6.12　証明：合成角運動量の固有関数 [(3.37）式]

(3.23）式に $\langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j, m\rangle$ を掛けて j 及び m について和をとれば

$$\sum_j \sum_m \langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j, m\rangle |\alpha, j, m\rangle = \sum_j \sum_m \langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j, m\rangle$$

$$\times \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle$$

$$\times \sum_j \sum_m \langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j, m\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle \delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2, m_2'}$$

$$= |\alpha_1, j_1, m_1'\rangle |\alpha_2, j_2, m_2'\rangle \tag{6.97}$$

6.13　証明：Clebsch-Gordan 係数の漸化式 [(3.38）式]

(3.23）式の両辺に $j_\pm = j_{1\pm} + j_{2\pm}$ を演算すれば

$$j_\pm |\alpha, j, m\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle j_{1\pm} |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle$$

$$+ \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle |\alpha_1, j_1, m_1\rangle j_{2\pm} |\alpha_2, j_2, m_2\rangle \tag{6.98}$$

よって

$$\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |\alpha, j, m \pm 1\rangle$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle$$

$$\times \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)} |\alpha_1, j_1, m_1 \pm 1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle$$

$$+ \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle$$

$$\times |\alpha_1, j_1, m_1\rangle \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)} |\alpha_2, j_2, m_2 \pm 1\rangle \tag{6.99}$$

さらに変形して

$$\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \pm 1\rangle |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle$$

$$\times \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)} |\alpha_1, j_1, m_1 \pm 1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle$$

$$+ \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle$$

$$\times \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)} |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2 \pm 1\rangle \tag{6.100}$$

ここで $|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle$ の係数を等しいとおけば

$$\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \pm 1\rangle$$

$$= \langle j_1, m_1 \mp 1, j_2, m_2 | j, m \rangle \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \mp 1)}$$

$$+ \langle j_1, m_1, j_2, m_2 \mp 1 | j, m \rangle \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \mp 1)} \tag{6.101}$$

6.14 証明：3-j 記号の対称性（列の置換に関する対称性）

$|\alpha_1, j_1, m_1\rangle$ と $|\alpha_2, j_2, m_2\rangle$ の積の一次結合によって $|\alpha_{12}, j_{12}, m_{12}\rangle$ を作る。

$$|\alpha_{12}, j_{12}, m_{12}\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_{12}, m_{12}\rangle |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle \tag{6.102}$$

さらに $|\alpha_{12}, j_{12}, m_{12}\rangle$ と $|\alpha_3, j_3, m_3\rangle$ の積の一次結合によって $|\alpha, j, m\rangle$ を作る。

$$|\alpha, j, m\rangle = \sum_{m_{12}} \sum_{m_3} \langle j_{12}, m_{12}, j_3, m_3 | j, m\rangle |\alpha_{12}, j_{12}, m_{12}\rangle |\alpha_3, j_3, m_3\rangle \tag{6.103}$$

$j = m = 0$ のものを作るとすれば

$$|\alpha, 0, 0\rangle = \sum_{m_{12}} \sum_{m_3} \langle j_{12}, m_{12}, j_3, m_3 | 0, 0\rangle |\alpha_{12}, j_{12}, m_{12}\rangle |\alpha_3, j_3, m_3\rangle$$

$$= \sum_{m_3} \langle j_3, -m_3, j_3, m_3 | 0, 0\rangle |\alpha_{12}, j_3, -m_3\rangle |\alpha_3, j_3, m_3\rangle$$

$$= \sum_{m_3} \langle j_3, -m_3, j_3, m_3 | 0, 0\rangle$$

$$\times \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, -m_3\rangle |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle |\alpha_3, j_3, m_3\rangle$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} (-1)^{j_3+m_3} (2j_3+1)^{-1/2} (-1)^{j_1-j_2-m_3} (2j_3+1)^{1/2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times |\alpha_1, j_1, m_1\rangle |\alpha_2, j_2, m_2\rangle |\alpha_3, j_3, m_3\rangle$$

$$= (-1)^{j_1-j_2+j_3} \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle \tag{6.104}$$

この式は 3-j 記号の新しい意味付けを与える。すなわち
$|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle$ の一次結合

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle \tag{6.105}$$

は合成角運動量がゼロ ($j = m = 0$) の状態の規格化された固有関数となる。

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} |\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle \tag{6.106}$$

や

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} |\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle \tag{6.107}$$

も合成角運動量がゼロの状態の規格化された固有関数となるはずである。
$|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle$ の一次結合から作れる合成角運動量がゼロの状態はただ１つしかないので、ϵ 及び η を m_1、m_2、m_3 には依存しない定数として

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \tag{6.108}$$

なる関係が成り立っていなければならない。しかも (6.105)、(6.106)、(6.107）式はどれも規格化されており、係数は実数なので、ϵ 及び η は $+1$ または -1 のいずれかでなければならない。ϵ 及び η が $+1$ または -1 のいずれであるかを定めるためには、m_1、m_2、m_3 に適当な値を与えて符号を比較すれば良い。例えば、$m_1 = j_1$、$m_2 = -j_1 - m_3$ とおくことにより

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & -j_1 - m_3 & m_3 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ j_1 & m_3 & -j_1 - m_3 \end{pmatrix} \tag{6.109}$$

両辺の 3-j 記号を Clebsch-Gordan 係数で書き換えることにより

$$(-1)^{j_1-j_2-m_3}(2j_3+1)^{-1/2}\langle j_1, j_1, j_2, -j_1-m_3|j_3, -m_3\rangle$$

$$= \eta(-1)^{j_1-j_3+j_1+m_3}(2j_2+1)^{-1/2}\langle j_1, j_1, j_3, m_3|j_2, j_1+m_3\rangle \tag{6.110}$$

上式の Clebsch-Gordan 係数はいずれも正である。よって

$$\eta = (-1)^{j_1-j_2-m_3}(-1)^{j_1-j_3+j_1+m_3} = (-1)^{3j_1-j_2-j_3} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \tag{6.111}$$

また、$m_3 = -j_3$、$m_2 = j_3 - m_1$ とおくことにより

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & j_3 - m_1 & -j_3 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_3 - m_1 & m_1 & -j_3 \end{pmatrix} \tag{6.112}$$

両辺の 3-j 記号を Clebsch-Gordan 係数で書き換えることにより

$$\begin{aligned} &(-1)^{j_1-j_2+j_3}(2j_3+1)^{-1/2}\langle j_1, m_1, j_2, j_3 - m_1 | j_3, j_3\rangle \\ &\qquad = \epsilon(-1)^{j_2-j_1+j_3}(2j_3+1)^{-1/2}\langle j_2, j_3 - m_1, j_1, m_1 | j_3, j_3\rangle \end{aligned} \tag{6.113}$$

左辺の Clebsch-Gordan 係数の符号は $(-1)^{j_1-m_1}$ に等しく、右辺の Clebsch-Gordan 係数の符号は $(-1)^{j_2-j_3+m_1}$ に等しい。よって

$$\epsilon = (-1)^{j_1-j_2+j_3}(-1)^{j_1-m_1}(-1)^{j_2-j_1+j_3}(-1)^{j_2-j_3+m_1} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \tag{6.114}$$

この結果を（6.108）に代入すれば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.115}$$

後の２つを比べれば、列の輪換によって値が変化しないことがわかる。前の２つを見れば、第１列と第２列の交換によって値が $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ 倍される（$j_1 + j_2 + j_3$ が奇数なら符号が変わり、偶数なら不変 ）ことがわかる。これと列の輪換によって値が変化しないことを合わせて考えれば、任意の２列の交換によって値が $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ 倍されることが導かれる。（補足）符号因子を整理する要領

上の証明において $(-1)^x(-1)^y(-1)^z\cdots$ の形をもつ符号因子を簡潔な形に書き換えることを行ったが、3-j 記号などを使って実際的な計算を行うときには、そのような書き換えをする場面にしばしば出会う。そこで符号因子を簡潔化するときの要領をすこし記しておく。$(-1)^x(-1)^y(-1)^z\cdots$ は最も単純には $(-1)^{x+y+z+\cdots}$ の形にまとめることができるが、指数 x や y などは必ず整数なので、$(-1)^x$ や $(-1)^y$ は $(-1)^{-x}$ や $(-1)^{-y}$ で置き換えることができる。このような置き換えを予め行うことで、より簡潔な表記を得ることができる場合がある。

このようにして指数をひとつにまとめた後は、指数に含まれる量子数またはそれらの組み合わせで整数になるものに注目する。たとえば次のようなものがある。

- 整数であることが予め知れている量子数
- 任意の量子数の2倍
- 任意の角運動量量子数を j、それに対応する射影の量子数を m とするとき、$j+m$ 及び $j-m$ は整数である
- 3-j 記号の上段に現れる3つの角運動量のように三角形を作る関係にある量子数を j_1、j_2、j_3 とするとき、これらに任意の符号を付けて和をとったもの、すなわち $j_1+j_2+j_3$、$j_1+j_2-j_3$、$j_1-j_2+j_3$、$j_1-j_2-j_3$、$-j_1+j_2+j_3$、$-j_1+j_2-j_3$、$-j_1-j_2+j_3$、$-j_1-j_2-j_3$ はすべて整数である。

このような整数となる部分の符号を反転しても、符号因子は不変に保たれる。また整数となるものの2倍を指数に足したり引いたりしても、符号因子は不変に保たれる。

6.15 証明：3-j 記号の対称性（m の符号の反転に関する対称性）

固有関数 $|\alpha_1, j_1, m_1\rangle$ は下記の関係を満足している。

$$\hat{j}_Z|\alpha_1, j_1, m_1\rangle = m_1|\alpha_1, j_1, m_1\rangle \tag{6.116}$$

$$\hat{j}_\pm|\alpha_1, j_1, m_1\rangle = \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1\pm 1)}|\alpha_1, j_1, m_1\pm 1\rangle \tag{6.117}$$

新しい角運動量演算子を

$$\hat{j}'_Z = -\hat{j}_Z \tag{6.118}$$

$$\hat{j}'_\pm = \hat{j}_\mp \tag{6.119}$$

によって定義すれば（これらは角運動量演算子が満足すべき交換関係を満たす）

$$\hat{j}'_Z|\alpha_1, j_1, m_1\rangle = -m_1|\alpha_1, j_1, m_1\rangle \tag{6.120}$$

$$\hat{j}'_\pm|\alpha_1, j_1, m_1\rangle = \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1\mp 1)}|\alpha_1, j_1, m_1\mp 1\rangle \tag{6.121}$$

ここで

$$|\alpha_1, j_1, m_1\rangle' = |\alpha_1, j_1, -m_1\rangle \tag{6.122}$$

とすれば

$$\hat{j}'_Z|\alpha_1, j_1, -m_1\rangle' = -m_1|\alpha_1, j_1, -m_1\rangle' \tag{6.123}$$

$$\hat{j}'_\pm|\alpha_1, j_1, -m_1\rangle' = \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1\mp 1)}|\alpha_1, j_1, -m_1\pm 1\rangle' \tag{6.124}$$

m_1 を $-m_1$ で置き換えて書きなおせば

$$\hat{j}'_Z|\alpha_1, j_1, m_1\rangle' = m_1|\alpha_1, j_1, m_1\rangle' \tag{6.125}$$

$$\hat{j}'_{\pm}|\alpha_1, j_1, m_1\rangle' = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)}|\alpha_1, j_1, m_1 \pm 1\rangle' \tag{6.126}$$

よって $|\alpha_1, j_1, m_1\rangle'$ は角運動量 $\hat{\boldsymbol{j}}'_1$ の固有関数になっている。同様に考えた $\hat{\boldsymbol{j}}'_2$、$\hat{\boldsymbol{j}}'_3$ の固有関数 $|\alpha_2, j_2, m_2\rangle'$、$|\alpha_3, j_3, m_3\rangle'$ を用いて作られた

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}|\alpha_1, j_1, m_1\rangle'|\alpha_2, j_2, m_2\rangle'|\alpha_3, j_3, m_3\rangle' \tag{6.127}$$

は、やはり合成角運動量がゼロ $(j = m = 0)$ の状態の規格化された固有関数となる。これは、$'$ の付かない固有関数から作られたものと実質同じものであるから

$$\begin{aligned}&\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}|\alpha_1, j_1, m_1\rangle'|\alpha_2, j_2, m_2\rangle'|\alpha_3, j_3, m_3\rangle' \\ &\qquad = \zeta\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle\end{aligned} \tag{6.128}$$

ここで ζ は $+1$ または -1 である。(6.128)式の左辺は

$$\begin{aligned}&\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}|\alpha_1, j_1, m_1\rangle'|\alpha_2, j_2, m_2\rangle'|\alpha_3, j_3, m_3\rangle' \\ &= \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}|\alpha_1, j_1, -m_1\rangle|\alpha_2, j_2, -m_2\rangle|\alpha_3, j_3, -m_3\rangle \\ &= \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle\end{aligned} \tag{6.129}$$

となるから

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \zeta\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{6.130}$$

$m_1 = j_1$、$m_3 = -j_3$、$m_2 = j_3 - j_1$ とおけば

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -j_1 & j_1 - j_3 & j_3 \end{pmatrix} = \zeta\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_3 - j_1 & -j_3 \end{pmatrix} \tag{6.131}$$

左辺を輪換によって変形して

$$\begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ j_3 & -j_1 & j_1-j_3 \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_3-j_1 & -j_3 \end{pmatrix} \tag{6.132}$$

両辺を Clebsch-Gordan 係数で書き換えて

$$\begin{aligned} &(-1)^{j_3-j_1-j_1+j_3}(2j_2+1)^{-1/2}\langle j_3, j_3, j_1, -j_1|j_2, j_3-j_1\rangle \\ &\qquad = \zeta(-1)^{j_1-j_2+j_3}(2j_3+1)^{-1/2}\langle j_1, j_1, j_2, j_3-j_1|j_3, j_3\rangle \end{aligned} \tag{6.133}$$

Clebsch-Gordan 係数はいずれも正であるから

$$\zeta = (-1)^{j_3-j_1-j_1+j_3}(-1)^{j_1-j_2+j_3} = (-1)^{3j_3-j_1-j_2} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \tag{6.134}$$

よって

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{6.135}$$

6.16　証明：3-j 記号の漸化式 [(3.47）式]

(3.47）式は、(6.105）式の一次結合が合成角運動量ゼロの状態を表すことから出発して直接示すこともできる。(6.105）式に

$$\hat{J}_\pm = \hat{j}_{1\pm} + \hat{j}_{2\pm} + \hat{j}_{3\pm} \tag{6.136}$$

を演算すればゼロになるはずである。

$$\begin{aligned} &\hat{J}_\pm \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle \\ &\quad = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \\ &\qquad \times \Big[\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1\pm 1)}|\alpha_1, j_1, m_1\pm 1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle \\ &\qquad\quad + \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2\pm 1)}|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\pm 1\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle \\ &\qquad\quad + \sqrt{j_3(j_3+1)-m_3(m_3\pm 1)}|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\pm 1\rangle\Big] \\ &\quad = 0 \end{aligned} \tag{6.137}$$

上式において、 $|\alpha_1, j_1, m_1\rangle|\alpha_2, j_2, m_2\rangle|\alpha_3, j_3, m_3\rangle$ の係数をゼロに等しいとおけば、(3.47）式が得られる。

6.17 証明：6-j 記号の意味付け [(3.88）式]

$$|j_1,j_2,j_{12},m_{12}\rangle=\sum_{m_1}\sum_{m_2}\langle j_1,m_1,j_2,m_2|j_{12},m_{12}\rangle|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle \tag{6.138}$$

$$|(j_1,j_2)j_{12},j_3,j,m\rangle=\sum_{m_{12}}\sum_{m_3}\langle j_{12},m_{12},j_3,m_3|j,m\rangle|j_1,j_2,j_{12},m_{12}\rangle|j_3,m_3\rangle$$
$$=\sum_{m_{12}}\sum_{m_3}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\langle j_{12},m_{12},j_3,m_3|j,m\rangle\langle j_1,m_1,j_2,m_2|j_{12},m_{12}\rangle$$
$$\times|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle|j_3,m_3\rangle \tag{6.139}$$

一方、

$$|j_2,j_3,j_{23},m_{23}\rangle=\sum_{m_2}\sum_{m_3}\langle j_2,m_2,j_3,m_3|j_{23},m_{23}\rangle|j_2,m_2\rangle|j_3,m_3\rangle \tag{6.140}$$

$$|j_1,(j_2,j_3)j_{23},j,m\rangle=\sum_{m_1}\sum_{m_{23}}\langle j_1,m_1,j_{23},m_{23}|j,m\rangle|j_1,m_1\rangle|j_2,j_3,j_{23},m_{23}\rangle$$
$$=\sum_{m_1}\sum_{m_{23}}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\langle j_1,m_1,j_{23},m_{23}|j,m\rangle\langle j_2,m_2,j_3,m_3|j_{23},m_{23}\rangle$$
$$\times|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle|j_3,m_3\rangle \tag{6.141}$$

(6.139) 式と (6.141) 式の内積は

$$\langle(j_1,j_2)j_{12},j_3,j,m|j_1,(j_2,j_3)j_{23},j,m\rangle=\langle j_1,(j_2,j_3)j_{23},j,m|(j_1,j_2)j_{12},j_3,j,m\rangle$$
$$=\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_{12}}\sum_{m_{23}}\langle j_{12},m_{12},j_3,m_3|j,m\rangle\langle j_1,m_1,j_2,m_2|j_{12},m_{12}\rangle$$
$$\times\langle j_1,m_1,j_{23},m_{23}|j,m\rangle\langle j_2,m_2,j_3,m_3|j_{23},m_{23}\rangle \tag{6.142}$$

なお、この係数は m に依らないので m で総和をとれば

$$(2j+1)\langle(j_1,j_2)j_{12},j_3,j,m|j_1,(j_2,j_3)j_{23},j,m\rangle$$
$$=\sum_{m}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_{12}}\sum_{m_{23}}\langle j_{12},m_{12},j_3,m_3|j,m\rangle\langle j_1,m_1,j_2,m_2|j_{12},m_{12}\rangle$$
$$\times\langle j_1,m_1,j_{23},m_{23}|j,m\rangle\langle j_2,m_2,j_3,m_3|j_{23},m_{23}\rangle \tag{6.143}$$

上式の Clebsch-Gordan 係数を 3-j 記号で書き直せば

$$(2j+1)\langle(j_1,j_2)j_{12},j_3,j,m|j_1,(j_2,j_3)j_{23},j,m\rangle$$
$$=\sum_{\text{all } m}(-1)^{j_{12}-j_3+m}\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j \\ m_{12} & m_3 & -m \end{pmatrix}$$

$$\times(-1)^{j_1-j_2+m_{12}}\sqrt{2j_{12}+1}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix}$$

$$\times(-1)^{j_1-j_{23}+m}\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j_1 & j_{23} & j \\ m_1 & m_{23} & -m \end{pmatrix}$$

$$\times(-1)^{j_2-j_3+m_{23}}\sqrt{2j_{23}+1}\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ m_2 & m_3 & -m_{23} \end{pmatrix} \tag{6.144}$$

両辺を $(2j+1)[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2}$ で割って

$$\begin{aligned}
&[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{-1/2}\langle (j_1,j_2)j_{12},j_3,j,m|j_1,(j_2,j_3)j_{23},j,m\rangle \\
&= \sum_{\text{all } m}(-1)^{j_{12}-j_3+m}(-1)^{j_1-j_2+m_{12}}(-1)^{j_1-j_{23}+m}(-1)^{j_2-j_3+m_{23}} \\
&\qquad \times\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_{23} & j \\ m_1 & m_{23} & -m \end{pmatrix} \\
&\qquad \times\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ m_2 & m_3 & -m_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j \\ m_{12} & m_3 & -m \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\text{all } m}(-1)^{j_{12}-j_3+m}(-1)^{j_1-j_2-m_{12}}(-1)^{j_1-j_{23}+m}(-1)^{j_2-j_3+m_{23}} \\
&\qquad \times\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix}(-1)^{j_1+j_{23}+j}\begin{pmatrix} j_1 & j & j_{23} \\ m_1 & -m & m_{23} \end{pmatrix} \\
&\qquad \times(-1)^{j_2+j_3+j_{23}}\begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ m_3 & m_2 & -m_{23} \end{pmatrix}(-1)^{j_{12}+j_3+j}\begin{pmatrix} j_3 & j & j_{12} \\ -m_3 & m & m_{12} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{j_1+j_2+j_3+j}\sum_{\text{all } m}(-1)^{j-m+j_{23}-m_{23}+j_3-m_3} \\
&\qquad \times\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j & j_{23} \\ m_1 & -m & m_{23} \end{pmatrix} \\
&\qquad \times\begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ m_3 & m_2 & -m_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_3 & j & j_{12} \\ -m_3 & m & m_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3+j} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} \tag{6.145}$$

よって

$$\langle (j_1, j_2)j_{12}, j_3, j, m | j_1, (j_2, j_3)j_{23}, j, m \rangle$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3+j}[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} \tag{6.146}$$

また、(3.69) 式を用いれば

$$\langle (j_1, j_2)j_{12}, j_3, j, m | (j_2, j_3)j_{23}, j_1, j, m \rangle$$

$$= (-1)^{2j_1+j_2+j_3+j_{23}}[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} \tag{6.147}$$

6.18 証明：6-j 記号の対称性

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_4-m_4+j_5-m_5+j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} \tag{6.148}$$

が列の輪換によって不変であることはほとんど自明である。
第１列と第２列を交換したものは

$$\begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{Bmatrix} = \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_5-m_5+j_4-m_4+j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ m_2 & -m_4 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_5 & j_1 & j_6 \\ m_5 & m_1 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_5 & j_4 & j_3 \\ -m_5 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_4-m_4+j_5-m_5+j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ -m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & -m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & -m_3 \end{pmatrix}$$

$$
= \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_4-m_4+j_5-m_5+j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \tag{6.149}
$$

この結果と列の輪換によって不変であることを合わせて考えれば、任意の２列の交換によって不変に保たれることがわかる。
次に、第１列と第２列において上下の変数を交換したものは

$$
\begin{Bmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_6 \end{Bmatrix} = \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2+j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & -m_2 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & m_5 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_1+m_1+j_2-m_2+j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ -m_1 & m_5 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ -m_4 & -m_2 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_1+m_1+j_2-m_2+j_6-m_6} (-1)^{j_1+j_5+j_6} (-1)^{j_4+j_2+j_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_4-m_4+j_5-m_5+j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \tag{6.150}$$

この結果と列の輪換によって不変であることを合わせて考えれば、任意の２列において上下の変数を交換しても不変に保たれることがわかる。

6.19　証明：6-j 記号の簡単化 [(3.92）式]

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & 0 \end{Bmatrix} = \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_2-m_4+j_1-m_5-m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & 0 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} \tag{6.151}$$

m_6 の値は 0 のみ可能、また m_4 及び m_5 の値はそれぞれ $-m_2$ 及び m_1 に限られるので、これらを代入したうえ、m_4、m_5、m_6 についての総和をはずす。

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & 0 \end{Bmatrix} = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} (-1)^{j_2+m_2+j_1-m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & 0 \\ -m_2 & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} (-1)^{j_2+m_2+j_1-m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & 0 \\ -m_2 & m_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3} [(2j_1+1)(2j_2+1)]^{-1/2}$$

$$\times \sum_{m_3}\sum_{m_1}\sum_{m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3} [(2j_1+1)(2j_2+1)]^{-1/2} \sum_{m_3} (2j_3+1)^{-1}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3} [(2j_1+1)(2j_2+1)]^{-1/2} \tag{6.152}$$

6.20 証明：6-j 記号の具体的な値 [(3.94) 式]

$$\langle (j_1,j_2)j_{12},j_3,j,m|(j_2,j_3)j_{23},j_1,j,m\rangle$$

$$=\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_{12}}\sum_{m_{23}}\langle j_{12},m_{12},j_3,m_3|j,m\rangle\langle j_1,m_1,j_2,m_2|j_{12},m_{12}\rangle$$

$$\times\langle j_{23},m_{23},j_1,m_1|j,m\rangle\langle j_2,m_2,j_3,m_3|j_{23},m_{23}\rangle \tag{6.153}$$

上式において $j=m=j_{12}+j_3$ とすれば

$$\langle (j_1,j_2)j_{12},j_3,j_{12}+j_3,j_{12}+j_3|(j_2,j_3)j_{23},j_1,j_{12}+j_3,j_{12}+j_3\rangle$$

$$=\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_{12}}\sum_{m_{23}}\langle j_{12},m_{12},j_3,m_3|j_{12}+j_3,j_{12}+j_3\rangle\langle j_1,m_1,j_2,m_2|j_{12},m_{12}\rangle$$

$$\times\langle j_{23},m_{23},j_1,m_1|j_{12}+j_3,j_{12}+j_3\rangle\langle j_2,m_2,j_3,m_3|j_{23},m_{23}\rangle \tag{6.154}$$

(6.154) 式の各項は、$m_{12}=j_{12}$、$m_3=j_3$、$m_1=j_{12}-m_2$、$m_{23}=j_3+m_2$ である場合以外はゼロとなるので

$$\langle (j_1,j_2)j_{12},j_3,j_{12}+j_3,j_{12}+j_3|(j_2,j_3)j_{23},j_1,j_{12}+j_3,j_{12}+j_3\rangle$$

$$=\sum_{m_2}\langle j_{12},j_{12},j_3,j_3|j_{12}+j_3,j_{12}+j_3\rangle\langle j_1,j_{12}-m_2,j_2,m_2|j_{12},j_{12}\rangle$$

$$\times\langle j_{23},j_3+m_2,j_1,j_{12}-m_2|j_{12}+j_3,j_{12}+j_3\rangle\langle j_2,m_2,j_3,j_3|j_{23},j_3+m_2\rangle$$

$$=\sum_{m_2}(-1)^{2j_2}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12}\\ -j_{12}+m_2 & -m_2 & j_{12}\end{pmatrix}\sqrt{2j_{12}+1}$$

$$\times(-1)^{2j_1}\begin{pmatrix} j_{23} & j_1 & j_{12}+j_3\\ -j_3-m_2 & -j_{12}+m_2 & j_{12}+j_3\end{pmatrix}\sqrt{2j_{12}+2j_3+1}$$

$$\times(-1)^{j_3+j_{23}-m_2}\begin{pmatrix} j_2 & j_{23} & j_3\\ m_2 & -j_3-m_2 & j_3\end{pmatrix}\sqrt{2j_{23}+1}$$

$$=\sum_{m_2}(-1)^{2j_2+j_1-j_{12}+m_2+2j_2+2j_1+j_{23}-j_3-m_2+2j_1+j_3+j_{23}-m_2+j_2+m_2+2j_{23}}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{12}+1)!(s_1-2j_{12})!(j_1+j_{12}-m_2)!(j_2+m_2)!}{(s_1+1)!(s_1-2j_1)!(s_1-2j_2)!(j_1-j_{12}+m_2)!(j_2-m_2)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{12}+2j_3+1)!(s_2-2j_{12}-2j_3)!(j_{23}+j_3+m_2)!(j_1+j_{12}-m_2)!}{(s_2+1)!(s_2-2j_{23})!(s_2-2j_1)!(j_{23}-j_3-m_2)!(j_1-j_{12}+m_2)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{23}+1)(2j_3)!(s_3-2j_3)!(j_2-m_2)!(j_{23}+j_3+m_2)!}{(s_3+1)!(s_3-2j_2)!(s_3-2j_{23})!(j_2+m_2)!(j_{23}-j_3-m_2)!}\right]^{1/2} \tag{6.155}$$

但し

$$s_1 = j_1 + j_2 + j_{12} \tag{6.156}$$

$$s_2 = j_{23} + j_1 + j_{12} + j_3 \tag{6.157}$$

$$s_3 = j_2 + j_{23} + j_3 \tag{6.158}$$

(6.155) 式は、(6.89) 式を用いて、以下のように簡単化される。

$$\langle (j_1, j_2)j_{12}, j_3, j_{12}+j_3, j_{12}+j_3 | (j_2, j_3)j_{23}, j_1, j_{12}+j_3, j_{12}+j_3 \rangle$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j_{12}}\left[\frac{(2j_{12}+1)!(s_1-2j_{12})!}{(s_1+1)!(s_1-2j_1)!(s_1-2j_2)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{12}+2j_3+1)!(s_2-2j_{12}-2j_3)!}{(s_2+1)!(s_2-2j_{23})!(s_2-2j_1)!}\right]^{1/2}\left[\frac{(2j_{23}+1)(2j_3)!(s_3-2j_3)!}{(s_3+1)!(s_3-2j_2)!(s_3-2j_{23})!}\right]^{1/2}$$

$$\times\sum_{m_2}\frac{(j_{23}+j_3+m_2)!(j_1+j_{12}-m_2)!}{(j_1-j_{12}+m_2)!(j_{23}-j_3-m_2)!}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j_{12}}\left[\frac{(2j_{12}+1)!(s_1-2j_{12})!}{(s_1+1)!(s_1-2j_1)!(s_1-2j_2)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{12}+2j_3+1)!(s_2-2j_{12}-2j_3)!}{(s_2+1)!(s_2-2j_{23})!(s_2-2j_1)!}\right]^{1/2}\left[\frac{(2j_{23}+1)(2j_3)!(s_3-2j_3)!}{(s_3+1)!(s_3-2j_2)!(s_3-2j_{23})!}\right]^{1/2}$$

$$\times\frac{(j_{23}+j_3+j_1+j_{12}+1)!(j_{23}+j_3-j_1+j_{12})!(j_1+j_{12}-j_{23}+j_3)!}{(j_1-j_{12}+j_{23}-j_3)!(j_{23}+j_3+j_1+j_{12}-j_1+j_{12}-j_{23}+j_3+1)!}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j_{12}}\left[\frac{(2j_{12}+1)!(j_1+j_2-j_{12})!}{(j_1+j_2+j_{12}+1)!(j_2+j_{12}-j_1)!(j_1+j_{12}-j_2)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{12}+2j_3+1)!(j_{23}+j_1-j_{12}-j_3)!}{(j_{23}+j_1+j_{12}+j_3+1)!(j_1+j_{12}+j_3-j_{23})!(j_{23}+j_{12}+j_3-j_1)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{23}+1)(2j_3)!(j_2+j_{23}-j_3)!}{(j_2+j_{23}+j_3+1)!(j_{23}+j_3-j_2)!(j_2+j_3-j_{23})!}\right]^{1/2}$$

$$\times\frac{(j_{23}+j_3+j_1+j_{12}+1)!(j_{23}+j_3-j_1+j_{12})!(j_1+j_{12}-j_{23}+j_3)!}{(j_1-j_{12}+j_{23}-j_3)!(2j_3+2j_{12}+1)!}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j_{12}}\left[\frac{(2j_{12}+1)!(j_1+j_2-j_{12})!}{(j_1+j_2+j_{12}+1)!(j_2+j_{12}-j_1)!(j_1+j_{12}-j_2)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(j_{23}+j_1+j_{12}+j_3+1)!(j_1+j_{12}+j_3-j_{23})!(j_{23}+j_{12}+j_3-j_1)!}{(2j_{12}+2j_3+1)!(j_{23}+j_1-j_{12}-j_3)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{23}+1)(2j_3)!(j_2+j_{23}-j_3)!}{(j_2+j_{23}+j_3+1)!(j_{23}+j_3-j_2)!(j_2+j_3-j_{23})!}\right]^{1/2} \tag{6.159}$$

(6.155) 式を 6-j 記号で表せば [(6.147) 式]

$$\langle (j_1,j_2)j_{12},j_3,j_{12}+j_3,j_{12}+j_3|(j_2,j_3)j_{23},j_1,j_{12}+j_3,j_{12}+j_3\rangle$$

$$=(-1)^{2j_1+j_2+j_3+j_{23}}[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_{12}+j_3 & j_{23}\end{Bmatrix}$$

$$=(-1)^{2j_1+j_2+j_3+j_{23}}[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_{23} & j_{12}+j_3 \\ j_3 & j_{12} & j_2\end{Bmatrix} \tag{6.160}$$

だから

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_{23} & j_{12}+j_3 \\ j_3 & j_{12} & j_2\end{Bmatrix}=(-1)^{j_1+j_3+j_{12}+j_{23}}$$

$$\times\left[\frac{(2j_{12})!(j_1+j_2-j_{12})!}{(j_1+j_2+j_{12}+1)!(j_2+j_{12}-j_1)!(j_1+j_{12}-j_2)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(j_{23}+j_1+j_{12}+j_3+1)!(j_1+j_{12}+j_3-j_{23})!(j_{23}+j_{12}+j_3-j_1)!}{(2j_{12}+2j_3+1)!(j_{23}+j_1-j_{12}-j_3)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(2j_3)!(j_2+j_{23}-j_3)!}{(j_2+j_{23}+j_3+1)!(j_{23}+j_3-j_2)!(j_2+j_3-j_{23})!}\right]^{1/2} \tag{6.161}$$

$j_2\to j_2+n$、$j_{23}\to j_2$、$j_3\to k$、$j_{12}\to j_3-k$ なる書き換えを行うと

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k & j_3-k & j_2+n\end{Bmatrix}$$

$$=(-1)^{j_1+j_2+j_3}\left[\frac{(2k)!}{(k-n)!(k+n)!}\frac{(2j_2-k+n)!}{(2j_2+k+n+1)!}\frac{(2j_3-2k)!}{(2j_3+1)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(j_1+j_2+j_3+1)!}{(j_1+j_2+j_3-k+n+1)!}\frac{(-j_1+j_2+j_3)!}{(-j_1+j_2+j_3-k+n)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\frac{(j_1-j_2+j_3)!}{(j_1-j_2+j_3-k-n)!}\frac{(j_1+j_2-j_3+k+n)!}{(j_1+j_2-j_3)!}\right]^{1/2} \tag{6.162}$$

6.21 証明：6-j 記号の漸化式 [(3.95) 式]

４つの角運動量の合成を考える。ここでは式の変形に、(3.69) 式より導かれる

$$|(j_2,j_1)j_{12},j_3,j,m\rangle=(-1)^{j_1+j_2-j_{12}}|(j_1,j_2)j_{12},j_3,j,m\rangle \tag{6.163}$$

を用いる。さらに (6.146) 及び (6.147) 式を参照のこと。関数 $|(j_2,j_3)j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m\rangle$ を $|[(j_2,j_3)j_{23},j_1]j'_{123},j_4,j,m\rangle$ で展開することを考える。j_{23} を合成するまでは共通だから

$$\begin{aligned}
&|(j_2,j_3)j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m\rangle\\
&\quad=\sum_{j'_{123}}\langle[(j_2,j_3)j_{23},j_1]j'_{123},j_4,j,m|(j_2,j_3)j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m\rangle\\
&\qquad\quad\times|[(j_2,j_3)j_{23},j_1]j'_{123},j_4,j,m\rangle\\
&\quad=\sum_{j'_{123}}\langle(j_{23},j_1)j'_{123},j_4,j,m|j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m\rangle|[(j_2,j_3)j_{23},j_1]j'_{123},j_4,j,m\rangle\\
&\quad=\sum_{j'_{123}}(-1)^{j_{23}+j_1+j_4+j}[(2j'_{123}+1)(2j_{14}+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} j_{23} & j_1 & j'_{123}\\ j_4 & j & j_{14}\end{Bmatrix}\\
&\qquad\quad\times|[(j_2,j_3)j_{23},j_1]j'_{123},j_4,j,m\rangle
\end{aligned} \tag{6.164}$$

次に $|[(j_1,j_2)j_{12},j_3]j_{123},j_4,j,m\rangle$ を $|[(j_2,j_3)j'_{23},j_1]j_{123},j_4,j,m\rangle$ で展開することを考える。j_{123} を合成した後は共通だから

$$\begin{aligned}
&|[(j_1,j_2)j_{12},j_3]j_{123},j_4,j,m\rangle\\
&\quad=\sum_{j'_{23}}\langle[(j_2,j_3)j'_{23},j_1]j_{123},j_4,j,m|[(j_1,j_2)j_{12},j_3]j_{123},j_4,j,m\rangle\\
&\qquad\quad\times|[(j_2,j_3)j'_{23},j_1]j_{123},j_4,j,m\rangle\\
&\quad=\sum_{j'_{23}}\langle(j_2,j_3)j'_{23},j_1,j_{123},m_{123}|(j_1,j_2)j_{12},j_3,j_{123},m_{123}\rangle\\
&\qquad\quad\times|[(j_2,j_3)j'_{23},j_1]j_{123},j_4,j,m\rangle\\
&\quad=\sum_{j'_{23}}(-1)^{2j_1+j_2+j_3+j'_{23}}[(2j_{12}+1)(2j'_{23}+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12}\\ j_3 & j_{123} & j'_{23}\end{Bmatrix}\\
&\qquad\quad\times|[(j_2,j_3)j'_{23},j_1]j_{123},j_4,j,m\rangle
\end{aligned} \tag{6.165}$$

よって、$|(j_2,j_3)j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m\rangle$ と $|[(j_1,j_2)j_{12},j_3]j_{123},j_4,j,m\rangle$ の内積は

$$\langle(j_2,j_3)j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m|[(j_1,j_2)j_{12},j_3]j_{123},j_4,j,m\rangle$$

$$= (-1)^{j_{23}+j_1+j_4+j}[(2j_{123}+1)(2j_{14}+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} j_{23} & j_1 & j_{123} \\ j_4 & j & j_{14} \end{Bmatrix}$$

$$\times(-1)^{2j_1+j_2+j_3+j_{23}}[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_{123} & j_{23} \end{Bmatrix}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3-j_4-j}[(2j_{123}+1)(2j_{14}+1)(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2}$$

$$\times\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_{123} & j_{23} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_{23} & j_1 & j_{123} \\ j_4 & j & j_{14} \end{Bmatrix} \tag{6.166}$$

次に $|(j_2,j_3)j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m\rangle$ を $|[(j_1,j_4)j_{14},j_2]j_{124},j_3,j,m\rangle$ で展開することを考える。

$$|(j_2,j_3)j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m\rangle$$

$$= \sum_{j_{124}}\langle[(j_1,j_4)j_{14},j_2]j_{124},j_3,j,m|(j_2,j_3)j_{23},(j_1,j_4)j_{14},j,m\rangle$$

$$\times|[(j_1,j_4)j_{14},j_2]j_{124},j_3,j,m\rangle$$

$$= \sum_{j_{124}}(-1)^{2j_{14}+j_2+j_3+j_{23}}[(2j_{124}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2}\begin{Bmatrix} j_{14} & j_2 & j_{124} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}$$

$$\times|[(j_1,j_4)j_{14},j_2]j_{124},j_3,j,m\rangle \tag{6.167}$$

さらに $|[(j_1,j_4)j_{14},j_2]j_{124},j_3,j,m\rangle$ を $|[(j_1,j_2)j'_{12},j_4]j_{124},j_3,j,m\rangle$ で展開する。

$$|[(j_1,j_4)j_{14},j_2]j_{124},j_3,j,m\rangle$$

$$= \sum_{j'_{12}}\langle[(j_1,j_2)j'_{12},j_4]j_{124},j_3,j,m||[(j_1,j_4)j_{14},j_2]j_{124},j_3,j,m\rangle$$

$$\times|[(j_1,j_2)j'_{12},j_4]j_{124},j_3,j,m\rangle$$

$$= \sum_{j'_{12}}\langle(j_1,j_2)j'_{12},j_4,j_{124},m_{124}|(j_1,j_4)j_{14},j_2,j_{124},m_{124}\rangle$$

$$\times|[(j_1,j_2)j'_{12},j_4]j_{124},j_3,j,m\rangle$$

$$= \sum_{j'_{12}}(-1)^{j_1+j_4-j_{14}}\langle(j_1,j_2)j'_{12},j_4,j_{124},m_{124}|(j_4,j_1)j_{14},j_2,j_{124},m_{124}\rangle$$

$$\times|[(j_1,j_2)j'_{12},j_4]j_{124},j_3,j,m\rangle$$

$$= \sum_{j'_{12}} (-1)^{j_4+j_2+j'_{12}+j_{14}} [(2j_{14}+1)(2j'_{12}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_4 & j_1 & j_{14} \\ j_2 & j_{124} & j'_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\times |[(j_1, j_2)j'_{12}, j_4]j_{124}, j_3, j, m\rangle \tag{6.168}$$

さらに $|[(j_1, j_2)j'_{12}, j_4]j_{124}, j_3, j, m\rangle$ を $|[(j_1, j_2)j'_{12}, j_3]j'_{123}, j_4, j, m\rangle$ で展開する。

$$|[(j_1, j_2)j'_{12}, j_4]j_{124}, j_3, j, m\rangle$$

$$= \sum_{j'_{123}} \langle [(j_1, j_2)j'_{12}, j_3]j'_{123}, j_4, j, m|[(j_1, j_2)j'_{12}, j_4]j_{124}, j_3, j, m\rangle$$

$$\times |[(j_1, j_2)j'_{12}, j_3]j'_{123}, j_4, j, m\rangle$$

$$= \sum_{j'_{123}} (-1)^{j_3+j_{12}-j'_{123}} \langle [j_3, (j_1, j_2)j'_{12}]j'_{123}, j_4, j, m|[(j_1, j_2)j'_{12}, j_4]j_{124}, j_3, j, m\rangle$$

$$\times |[(j_1, j_2)j'_{12}, j_3]j'_{123}, j_4, j, m\rangle$$

$$= \sum_{j'_{123}} (-1)^{j_3+j_4+j_{124}+j'_{123}} [(2j'_{123}+1)(2j_{124}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_3 & j'_{12} & j'_{123} \\ j_4 & j & j_{124} \end{Bmatrix}$$

$$\times |[(j_1, j_2)j'_{12}, j_3]j'_{123}, j_4, j, m\rangle \tag{6.169}$$

よって

$$|(j_2, j_3)j_{23}, (j_1, j_4)j_{14}, j, m\rangle$$

$$= \sum_{j_{124}} (-1)^{2j_{14}+j_2+j_3+j_{23}} [(2j_{124}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_{14} & j_2 & j_{124} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}$$

$$\times \sum_{j'_{12}} (-1)^{j_4+j_2+j'_{12}+j_{14}} [(2j_{14}+1)(2j'_{12}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_4 & j_1 & j_{14} \\ j_2 & j_{124} & j'_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\times \sum_{j'_{123}} (-1)^{j_3+j_4+j'_{123}+j_{124}} [(2j'_{123}+1)(2j_{124}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_3 & j'_{12} & j'_{123} \\ j_4 & j & j_{124} \end{Bmatrix}$$

$$\times |[(j_1, j_2)j'_{12}, j_3]j'_{123}, j_4, j, m\rangle \tag{6.170}$$

よって、$|(j_2, j_3)j_{23}, (j_1, j_4)j_{14}, j, m\rangle$ と $|[(j_1, j_2)j_{12}, j_3]j_{123}, j_4, j, m\rangle$ の内積は

$$\langle (j_2, j_3)j_{23}, (j_1, j_4)j_{14}, j, m|[(j_1, j_2)j_{12}, j_3]j_{123}, j_4, j, m\rangle$$

$$= \sum_{j_{124}} (-1)^{2j_{14}+j_2+j_3+j_{23}} [(2j_{124}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_{14} & j_2 & j_{124} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}$$

$$\times (-1)^{j_4+j_2+j_{12}+j_{14}} [(2j_{14}+1)(2j_{12}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_4 & j_1 & j_{14} \\ j_2 & j_{124} & j_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\times (-1)^{j_3+j_4+j_{123}+j_{124}} [(2j_{123}+1)(2j_{124}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_3 & j_{12} & j_{123} \\ j_4 & j & j_{124} \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{j_{124}} (-1)^{j_{12}+j_{14}+j_{23}-j_{123}+j_{124}} [(2j_{23}+1)(2j_{14}+1)(2j_{12}+1)(2j_{123}+1)]^{1/2}$$

$$\times (2j_{124}+1) \begin{Bmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ j_{14} & j & j_{124} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ j_4 & j_{124} & j_{14} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_{12} & j_{123} \\ j_4 & j & j_{124} \end{Bmatrix} \tag{6.171}$$

(6.166) 式と比較すれば

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_{123} & j_{23} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{23} & j_1 & j_{123} \\ j_4 & j & j_{14} \end{Bmatrix} = \sum_{j_{124}} (-1)^{j+j_1+j_2+j_3+j_4+j_{12}+j_{14}+j_{23}+j_{123}+j_{124}}$$

$$\times (2j_{124}+1) \begin{Bmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ j_{14} & j & j_{124} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ j_4 & j_{124} & j_{14} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_{12} & j_{123} \\ j_4 & j & j_{124} \end{Bmatrix} \tag{6.172}$$

$j_1 = a$、$j_2 = b$、$j_{12} = c$、$j_3 = d$、$j_{123} = e$、$j_{23} = f$、$j_4 = g$、$j_{14} = h$、$j_{124} = i$ なる置き換えを行うと

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & a & e \\ g & j & h \end{Bmatrix} = \sum_i (-1)^{a+b+c+d+e+f+g+h+i+j}$$

$$\times (2i+1) \begin{Bmatrix} d & b & f \\ h & j & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & a & c \\ g & i & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & e \\ g & j & i \end{Bmatrix} \tag{6.173}$$

$j = 1/2$、$h = f + 1/2$、$g = e + 1/2$ と置くと

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & a & e \\ e+1/2 & 1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix} = \sum_i (-1)^{a+b+c+d+2e+2f+i+3/2}$$

$$\times (2i+1) \begin{Bmatrix} d & b & f \\ f+1/2 & 1/2 & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & a & c \\ e+1/2 & i & f+1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & e \\ e+1/2 & 1/2 & i \end{Bmatrix}$$

$$(6.174)$$

$i = d \pm 1/2$ に限られるので

$$
\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & a & e \\ e+1/2 & 1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix} \\
&= (-1)^{a+b+c+2d+2e+2f}\, 2(d+1) \begin{Bmatrix} d & b & f \\ f+1/2 & 1/2 & d+1/2 \end{Bmatrix} \\
&\qquad \times \begin{Bmatrix} b & a & c \\ e+1/2 & d+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & e \\ e+1/2 & 1/2 & d+1/2 \end{Bmatrix} \\
&\quad +(-1)^{a+b+c+2d+2e+2f+1}\, 2d \begin{Bmatrix} d & b & f \\ f+1/2 & 1/2 & d-1/2 \end{Bmatrix} \\
&\qquad \times \begin{Bmatrix} b & a & c \\ e+1/2 & d-1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & e \\ e+1/2 & 1/2 & d-1/2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.175}
$$

対称性を利用して整理すれば

$$
\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & e+1/2 & f+1/2 \\ 1/2 & f & e \end{Bmatrix} \\
&= (-1)^{a+b+c+2d+2e+2f}\, 2(d+1) \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d+1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix} \\
&\qquad \times \begin{Bmatrix} b & d+1/2 & f+1/2 \\ 1/2 & f & d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d+1/2 & e+1/2 \\ 1/2 & e & d \end{Bmatrix} \\
&\quad +(-1)^{a+b+c+2d+2e+2f+1}\, 2d \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d-1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix} \\
&\qquad \times \begin{Bmatrix} b & f & d \\ 1/2 & d-1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & e & d \\ 1/2 & d-1/2 & e+1/2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.176}
$$

左下隅に 1/2 を含む 6-j 記号に具体的な値を入れて [(3.94) 式]

$$
\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} (-1)^{a+e+f+1}\left[\frac{(a+e+f+2)(-a+e+f+1)}{(2e+1)(2e+2)(2f+1)(2f+2)}\right]^{1/2}
$$

$$
= (-1)^{a+b+c+2d+2e+2f}\,2(d+1)\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d+1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix}
$$

$$
\times(-1)^{b+d+f+1}\left[\frac{(b+d+f+2)(-b+d+f+1)}{(2d+1)(2d+2)(2f+1)(2f+2)}\right]^{1/2}
$$

$$
\times(-1)^{c+d+e+1}\left[\frac{(c+d+e+2)(-c+d+e+1)}{(2d+1)(2d+2)(2e+1)(2e+2)}\right]^{1/2}
$$

$$
+(-1)^{a+b+c+2d+2e+2f+1}\,2d\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d-1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix}
$$

$$
\times(-1)^{b+d+f}\left[\frac{(b+d-f)(b-d+f+1)}{(2f+1)(2f+2)(2d)(2d+1)}\right]^{1/2}
$$

$$
\times(-1)^{c+d+e}\left[\frac{(c+d-e)(c-d+e+1)}{(2e+1)(2e+2)(2d)(2d+1)}\right]^{1/2} \tag{6.177}
$$

よって

$$
\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}(2d+1)\sqrt{(a+e+f+2)(-a+e+f+1)}
$$

$$
= -\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d+1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix}
$$

$$
\times\sqrt{(b+d+f+2)(-b+d+f+1)(c+d+e+2)(-c+d+e+1)}
$$

$$
+\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d-1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix}
$$

$$
\times\sqrt{(b+d-f)(b-d+f+1)(c+d-e)(c-d+e+1)} \tag{6.178}
$$

これより

$$
\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d+1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix}
$$

$$= [(b+d+f+2)(-b+d+f+1)(c+d+e+2)(-c+d+e+1)]^{-1/2}$$

$$\times \left[\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d-1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix} \right.$$

$$\times\sqrt{(b+d-f)(b-d+f+1)(c+d-e)(c-d+e+1)}$$

$$\left. -\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} (2d+1)\sqrt{(a+e+f+2)(-a+e+f+1)} \right] \tag{6.179}$$

$a=j_1$、$b=j_2$、$c=j_3$、$d=k-1/2$、$e=j_3+l-1/2$、$f=j_2+n-1/2$ なる置き換えを行えば

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k & j_3+l & j_2+n \end{Bmatrix} = [(2j_2+k+n+1)(k+n)(2j_3+k+l+1)(k+l)]^{-1/2}$$

$$\times \left[\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k-1 & j_3+l & j_2+n \end{Bmatrix} \sqrt{(k-n)(2j_2-k+n+1)(k-l)(2j_3-k+l+1)} \right.$$

$$-\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k-1/2 & j_3+l-1/2 & j_2+n-1/2 \end{Bmatrix}$$

$$\left. 2k\sqrt{(j_1+j_2+j_3+l+n+1)(-j_1+j_2+j_3+l+n)} \right] \tag{6.180}$$

6.22　証明：9-j 記号の対称性

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{Bmatrix} = \sum_{\text{all } m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_6 \\ m_4 & m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_7 & j_8 & j_9 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ m_1 & m_4 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_5 & j_8 \\ m_2 & m_5 & m_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_6 & j_9 \\ m_3 & m_6 & m_9 \end{pmatrix} \tag{6.181}$$

が列の輪換、行の輪換、及び転置によって不変であることはほとんど自明である。
第１列と第２列を交換したものは

$$\begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \\ j_8 & j_7 & j_9 \end{Bmatrix} = \sum_{\text{all } m} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_5 & j_4 & j_6 \\ m_5 & m_4 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_8 & j_7 & j_9 \\ m_8 & m_7 & m_9 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_2 & j_5 & j_8 \\ m_2 & m_5 & m_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ m_1 & m_4 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_6 & j_9 \\ m_3 & m_6 & m_9 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\text{all } m} (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+j_7+j_8+j_9} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_6 \\ m_4 & m_5 & m_6 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_7 & j_8 & j_9 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ m_1 & m_4 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_5 & j_8 \\ m_2 & m_5 & m_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_6 & j_9 \\ m_3 & m_6 & m_9 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+j_7+j_8+j_9} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{Bmatrix} \tag{6.182}$$

この結果と列の輪換及び行の輪換によって不変であることを合わせて考えれば、任意の2列または2行を交換すると $(-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+j_7+j_8+j_9}$ 倍されることがわかる。

6.23 証明：9-j 記号の簡単化 [(3.102）式]

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_3 \\ j_7 & j_7 & 0 \end{Bmatrix} = \sum_{\text{all } m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_7 & j_7 & 0 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ m_1 & m_4 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_5 & j_7 \\ m_2 & m_5 & m_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_3 & 0 \\ m_3 & m_6 & m_9 \end{pmatrix} \tag{6.183}$$

m_9 の値は 0 のみ可能、また m_6 及び m_8 の値はそれぞれ $-m_3$ 及び $-m_7$ に限られるので、これらを代入したうえ、m_6、m_8、m_9 についての総和をはずす。

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_3 \\ j_7 & j_7 & 0 \end{Bmatrix} = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}\sum_{m_5}\sum_{m_7} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ m_4 & m_5 & -m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_7 & j_7 & 0 \\ m_7 & -m_7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ m_1 & m_4 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_5 & j_7 \\ m_2 & m_5 & -m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_3 & 0 \\ m_3 & -m_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= [(2j_3+1)(2j_7+1)]^{-1/2}$$

$$\times \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}\sum_{m_5}\sum_{m_7}(-1)^{j_3-m_3}(-1)^{j_7-m_7}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ m_4 & m_5 & -m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ m_1 & m_4 & m_7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_5 & j_7 \\ m_2 & m_5 & -m_7 \end{pmatrix}$$

$$= [(2j_3+1)(2j_7+1)]^{-1/2}$$

$$\times \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}\sum_{m_5}\sum_{m_7}(-1)^{j_3-m_3}(-1)^{j_7-m_7}(-1)^{j_5+j_2+j_7}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ m_1 & m_4 & m_7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_5 & j_2 & j_7 \\ m_5 & m_2 & -m_7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_5 & j_4 & j_3 \\ -m_5 & -m_4 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$= [(2j_3+1)(2j_7+1)]^{-1/2}(-1)^{j_4+j_3+j_2+j_7}$$

$$\times \sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}\sum_{m_5}\sum_{m_7}(-1)^{j_5-m_5+j_4-m_4+j_7-m_7}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_7 \\ m_1 & -m_4 & m_7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_5 & j_2 & j_7 \\ m_5 & m_2 & -m_7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_5 & j_4 & j_3 \\ -m_5 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$= [(2j_3+1)(2j_7+1)]^{-1/2}(-1)^{j_2+j_3+j_4+j_7}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_7 \end{Bmatrix} \tag{6.184}$$

6.24 証明：9-j 記号の意味付け [(3.103) 式]

$$|j_1, j_2, j_{12}, m_{12}\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\langle j_1, m_1, j_2, m_2|j_{12}, m_{12}\rangle|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1}\sum_{m_2}(-1)^{j_1-j_2+m_{12}}\sqrt{2j_{12}+1}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix}|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle \tag{6.185}$$

同様に

$$|j_3, j_4, j_{34}, m_{34}\rangle$$

$$= \sum_{m_3}\sum_{m_4}(-1)^{j_3-j_4+m_{34}}\sqrt{2j_{34}+1}\begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & -m_{34} \end{pmatrix}|j_3, m_3\rangle|j_4, m_4\rangle \tag{6.186}$$

よって

$$|(j_1,j_2)j_{12},(j_3,j_4)j_{34},j,m\rangle=\sum_{m_{12}}\sum_{m_{34}}(-1)^{j_{12}-j_{34}+m}\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & j \\ m_{12} & m_{34} & -m \end{pmatrix}$$

$$\times|j_1,j_2,j_{12},m_{12}\rangle|j_3,j_4,j_{34},m_{34}\rangle$$

$$=\sum_{m_{12}}\sum_{m_{34}}(-1)^{j_{12}-j_{34}+m}\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & j \\ m_{12} & m_{34} & -m \end{pmatrix}$$

$$\times\sum_{m_1}\sum_{m_2}(-1)^{j_1-j_2+m_{12}}\sqrt{2j_{12}+1}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix}|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle$$

$$\times\sum_{m_3}\sum_{m_4}(-1)^{j_3-j_4+m_{34}}\sqrt{2j_{34}+1}\begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & -m_{34} \end{pmatrix}|j_3,m_3\rangle|j_4,m_4\rangle$$

$$=\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle|j_3,m_3\rangle|j_4,m_4\rangle$$

$$\times\sum_{m_{12}}\sum_{m_{34}}(-1)^{j_1-j_2+j_3-j_4-j_{12}+j_{34}}\sqrt{(2j+1)(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & j \\ m_{12} & m_{34} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & -m_{34} \end{pmatrix} \tag{6.187}$$

同様に

$$|(j_1,j_3)j_{13},(j_2,j_4)j_{24},j,m\rangle$$

$$=\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle|j_3,m_3\rangle|j_4,m_4\rangle$$

$$\times\sum_{m_{13}}\sum_{m_{24}}(-1)^{j_1-j_3+j_2-j_4-j_{13}+j_{24}}\sqrt{(2j+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & j \\ m_{13} & m_{24} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & -m_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & -m_{24} \end{pmatrix} \tag{6.188}$$

よって $|(j_1,j_2)j_{12},(j_3,j_4)j_{34},j,m\rangle$ と $|(j_1,j_3)j_{13},(j_2,j_4)j_{24},j,m\rangle$ の内積は

$$\langle(j_1,j_2)j_{12},(j_3,j_4)j_{34},j,m|(j_1,j_3)j_{13},(j_2,j_4)j_{24},j,m\rangle$$

$$=\sum_{m}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}\sum_{m_{12}}\sum_{m_{34}}\sum_{m_{13}}\sum_{m_{24}}(-1)^{j_1-j_2+j_3-j_4-j_{12}+j_{34}}(-1)^{j_1-j_3+j_2-j_4-j_{13}+j_{24}}$$

$$\times\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & j \\ m_{12} & m_{34} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & -m_{34} \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & j \\ m_{13} & m_{24} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & -m_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & -m_{24} \end{pmatrix} \tag{6.189}$$

ただし、この量は m に依存しないので m で総和をとり $2j+1$ で割った。3-j 記号の掛算の順序を変更し、$m_{12}, m_{34}, m_{13}, m_{14}$ の符号を反転して書けば

$$\langle (j_1, j_2)j_{12}, (j_3, j_4)j_{34}, j, m|(j_1, j_3)j_{13}, (j_2, j_4)j_{24}, j, m\rangle$$

$$= \sum_{m}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}\sum_{m_{12}}\sum_{m_{34}}\sum_{m_{13}}\sum_{m_{24}}(-1)^{2j_1-2j_4-j_{12}+j_{34}-j_{13}+j_{24}}$$

$$\times\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & m_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & j \\ -m_{13} & -m_{24} & -m \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & m_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & m_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & j \\ -m_{12} & -m_{34} & -m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{m}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{m_4}\sum_{m_{12}}\sum_{m_{34}}\sum_{m_{13}}\sum_{m_{24}}$$

$$\times\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & m_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & j \\ m_{13} & m_{24} & m \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & m_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & m_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & j \\ m_{12} & m_{34} & m \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{Bmatrix} \tag{6.190}$$

6.25 証明：Wigner-Eckart の定理

$$\Psi(j',m') = \sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle T(k,q)|\alpha,j,m\rangle \tag{6.191}$$

なる関数を考える。この関数に j_Z 及び $j_\pm$ を演算すると

$$j_Z\Psi(j',m') = \sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle j_Z T(k,q)|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle [qT(k,q) + T(k,q)j_Z]|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle [qT(k,q) + T(k,q)m]|\alpha,j,m\rangle$$

$$= m'\sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle T(k,q)|\alpha,j,m\rangle = m'\Psi(j',m') \tag{6.192}$$

$$j_\pm\Psi(j',m') = \sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle j_\pm T(k,q)|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle$$

$$\times \left[\sqrt{k(k+1)-q(q\pm 1)}T(k,q\pm 1) + T(k,q)j_\pm\right]|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle$$

$$\times \left[\sqrt{k(k+1)-q(q\pm 1)}T(k,q\pm 1)|\alpha,j,m\rangle + T(k,q)j_\pm|\alpha,j,m\rangle\right]$$

$$= \sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle \sqrt{k(k+1)-q(q\pm 1)}T(k,q\pm 1)|\alpha,j,m\rangle$$

$$+\sum_q \sum_m \langle k,q,j,m|j',m'\rangle T(k,q)\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}|\alpha,j,m\pm 1\rangle$$

$$= \sum_q \sum_m \langle k,q\mp 1,j,m|j',m'\rangle \sqrt{k(k+1)-q(q\mp 1)}T(k,q)|\alpha,j,m\rangle$$

$$+\sum_q \sum_m \langle k,q,j,m\mp 1|j',m'\rangle T(k,q)\sqrt{j(j+1)-m(m\mp 1)}|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sum_q \sum_m \left[\langle k,q\mp 1,j,m|j',m'\rangle \sqrt{k(k+1)-q(q\mp 1)}\right.$$

$$\left.+\langle k,q,j,m\mp 1|j',m'\rangle \sqrt{j(j+1)-m(m\mp 1)}\right] T(k,q)|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sum_q \sum_m \sqrt{j'(j'+1)-m'(m'\pm 1)}\langle k,q,j,m|j',m'\pm 1\rangle T(k,q)|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sqrt{j'(j'+1) - m'(m' \pm 1)}\Psi(j', m' \pm 1) \tag{6.193}$$

ただし、（3.38）式を参照のこと。（6.192）及び（6.193）式は、$\Psi(j', m')$ が量子数 j'、m' に対応する $\boldsymbol{j}$ の固有関数であることを示す。よって $\langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle$ を m'、q、m に依存しない定数として

$$\Psi(j', m') = (-1)^{k-j+j'}(3j'+1)^{-1/2} \sum_{\alpha'} \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle |\alpha', j', m'\rangle \tag{6.194}$$

と置くことができる。
一方、（6.191）式に $\langle k, q'', j, m'' | j', m' \rangle$ を掛けて j' 及び m' について和をとれば

$$\begin{aligned}
&\sum_{j'} \sum_{m'} \langle k, q'', j, m'' | j', m' \rangle \Psi(j', m') \\
&= \sum_q \sum_m \sum_{j'} \sum_{m'} \langle k, q'', j, m'' | j', m' \rangle \langle k, q, j, m | j', m' \rangle T(k,q) |\alpha, j, m\rangle \\
&= \sum_q \sum_m \delta_{q,q''} \delta_{m,m''} T(k,q) |\alpha, j, m\rangle = T(k, q'') |\alpha, j, m''\rangle
\end{aligned} \tag{6.195}$$

よって

$$\begin{aligned}
T(k,q)|\alpha, j, m\rangle &= \sum_{j'} \sum_{m'} \langle k, q, j, m | j', m' \rangle \Psi(j', m') \\
&= (-1)^{k-j+j'}(3j'+1)^{-1/2} \sum_{j'} \sum_{m'} \langle k, q, j, m | j', m' \rangle \\
&\quad \times \sum_{\alpha'} \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle |\alpha', j', m'\rangle
\end{aligned} \tag{6.196}$$

よって

$$\begin{aligned}
\langle \alpha', j', m' | T(k,q) | \alpha, j, m \rangle &= (-1)^{k-j+j'}(3j'+1)^{-1/2} \langle k, q, j, m | j', m' \rangle \\
&\quad \times \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle \\
&= (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} k & j & j' \\ q & m & -m' \end{pmatrix} \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle \\
&= (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle
\end{aligned} \tag{6.197}$$

6.26　証明：既約行列要素 [(3.130）式]

(3.129) 式の両辺に $(-1)^{j'-m'}\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}$ を掛けて m 及び m' について和をとれば

$$\sum_m \sum_{m'} (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \langle \alpha', j', m' | T(k,q) | \alpha, j, m \rangle$$

$$= \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle \sum_m \sum_{m'} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}^2$$

$$= (2k+1)^{-1} \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle \tag{6.198}$$

q について和をとれば

$$\langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle$$

$$= \sum_{m'} \sum_q \sum_m (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \langle \alpha', j', m' | T(k,q) | \alpha, j, m \rangle \tag{6.199}$$

6.27　証明：既約行列要素の複素共役 [(3.131）式]

$$\langle \alpha', j', m' | T(k,q) | \alpha, j, m \rangle = (-1)^{j'-m'} \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \tag{6.200}$$

の複素共役をとれば

$$\langle \alpha', j', m' | T(k,q) | \alpha, j, m \rangle^* = (-1)^{j'-m'} \langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle^* \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \tag{6.201}$$

一方

$$\langle \alpha', j', m' | T(k,q) | \alpha, j, m \rangle^* = \langle \alpha, j, m | T(k,q)^\dagger | \alpha', j', m' \rangle$$

$$= \langle \alpha, j, m | (-1)^q T(k,-q) | \alpha', j', m' \rangle$$

$$= (-1)^q(-1)^{j-m}\langle\alpha,j||T^{(k)}||\alpha',j'\rangle\begin{pmatrix} j & k & j' \\ -m & -q & m' \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^q(-1)^{j-m}\langle\alpha,j||T^{(k)}||\alpha',j'\rangle\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \tag{6.202}$$

（6.201）式と（6.202）式を比較すれば (ただし、$m' = m+q$)

$$(-1)^{j'-m-q}\langle\alpha',j'||T^{(k)}||\alpha,j\rangle^* = (-1)^q(-1)^{j-m}\langle\alpha,j||T^{(k)}||\alpha',j'\rangle \tag{6.203}$$

よって

$$\langle\alpha',j'||T^{(k)}||\alpha,j\rangle^* = (-1)^{j-j'}\langle\alpha,j||T^{(k)}||\alpha',j'\rangle \tag{6.204}$$

6.28 証明:合成球テンソル演算子の既約行列要素１ [(3.149) 式]

$$\langle\alpha',j'||X^{(k)}||\alpha,j\rangle$$

$$= \sum_{m'}\sum_{q}\sum_{m}(-1)^{j'-m'}\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}\langle\alpha',j',m'|X(k,q)|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sum_{m'}\sum_{q}\sum_{m}(-1)^{j'-m'}\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}\sum_{q_1}\sum_{q_2}\langle k_1,q_1,k_2,q_2|k,q\rangle$$

$$\times\sum_{\alpha''}\sum_{j''}\sum_{m''}\langle\alpha',j',m'|T(k_1,q_1)|\alpha'',j'',m''\rangle\langle\alpha'',j'',m''|U(k_2,q_2)|\alpha,j,m\rangle$$

$$= \sum_{\alpha''}\sum_{j''}\sum_{m}\sum_{m'}\sum_{m''}\sum_{q}\sum_{q_1}\sum_{q_2}(-1)^{j'-m'}(-1)^{k_1-k_2+q}(2k+1)^{1/2}$$

$$\times\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}$$

$$\times(-1)^{j'-m'}\langle\alpha',j'||T^{(k_1)}||\alpha'',j''\rangle\begin{pmatrix} j' & k_1 & j'' \\ -m' & q_1 & m'' \end{pmatrix}$$

$$\times(-1)^{j''-m''}\langle\alpha'',j''||U^{(k_2)}||\alpha,j\rangle\begin{pmatrix} j'' & k_2 & j \\ -m'' & q_2 & m \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2k+1)^{1/2} \sum_{\alpha''} \sum_{j''} \langle \alpha', j' || T^{(k_1)} || \alpha'', j'' \rangle \langle \alpha'', j'' || U^{(k_2)} || \alpha, j \rangle \\
&\quad \times \sum_{m} \sum_{m'} \sum_{m''} \sum_{q} \sum_{q_1} \sum_{q_2} (-1)^{k_1-k_2+q} (-1)^{j''-m''} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j' & k_1 & j'' \\ -m' & q_1 & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'' & k_2 & j \\ -m'' & q_2 & m \end{pmatrix} \\
&= (2k+1)^{1/2} \sum_{\alpha''} \sum_{j''} \langle \alpha', j' || T^{(k_1)} || \alpha'', j'' \rangle \langle \alpha'', j'' || U^{(k_2)} || \alpha, j \rangle \\
&\quad \times \sum_{m} \sum_{m'} \sum_{m''} \sum_{q} \sum_{q_1} \sum_{q_2} (-1)^{k_1-k_2+q} (-1)^{j''-m''} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & j' & j'' \\ -q_1 & m' & -m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & k_2 & j'' \\ -m & -q_2 & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & k \\ m & -m' & q \end{pmatrix} \\
&= (2k+1)^{1/2} \sum_{\alpha''} \sum_{j''} \langle \alpha', j' || T^{(k_1)} || \alpha'', j'' \rangle \langle \alpha'', j'' || U^{(k_2)} || \alpha, j \rangle \\
&\quad \times \sum_{m} \sum_{m'} \sum_{m''} \sum_{q} \sum_{q_1} \sum_{q_2} (-1)^{k_1-k_2+q} (-1)^{j''-m''} (-1)^{k_1+j'+j''} (-1)^{j+k_2+j''} (-1)^{j+j'+k} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & j' & j'' \\ q_1 & -m' & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & k_2 & j'' \\ m & q_2 & -m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & k \\ -m & m' & -q \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{j+j'+k} (2k+1)^{1/2} \sum_{\alpha''} \sum_{j''} \langle \alpha', j' || T^{(k_1)} || \alpha'', j'' \rangle \langle \alpha'', j'' || U^{(k_2)} || \alpha, j \rangle \\
&\quad \times \sum_{m} \sum_{m'} \sum_{m''} \sum_{q} \sum_{q_1} \sum_{q_2} (-1)^{j-m} (-1)^{j'-m'} (-1)^{j''-m''} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & j' & j'' \\ q_1 & -m' & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & k_2 & j'' \\ m & q_2 & -m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & k \\ -m & m' & -q \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{j+j'+k} (2k+1)^{1/2} \sum_{\alpha''} \sum_{j''} \langle \alpha', j' || T^{(k_1)} || \alpha'', j'' \rangle \langle \alpha'', j'' || U^{(k_2)} || \alpha, j \rangle \\
&\quad \times \sum_{m} \sum_{m'} \sum_{m''} \sum_{q_1} \sum_{q_2} \sum_{q} (-1)^{j-m} (-1)^{j'-m'} (-1)^{j''-m''} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & j' & j'' \\ q_1 & -m' & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & k_2 & j'' \\ m & q_2 & -m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & k \\ -m & m' & q \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{j+j'+k} (2k+1)^{1/2} \sum_{\alpha''} \sum_{j''} \langle \alpha', j' || T^{(k_1)} || \alpha'', j'' \rangle \langle \alpha'', j'' || U^{(k_2)} || \alpha, j \rangle \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ j & j' & j'' \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.205}
$$

6.29 証明：合成球テンソル演算子の既約行列要素２ [(3.156）式]

$$X(k,q) = \sum_{q_1}\sum_{q_2}\langle k_1,q_1,k_2,q_2|k,q\rangle T(k_1,q_1)\,U(k_2,q_2)$$

$$= (-1)^{k_1-k_2+q}(2k+1)^{1/2}\sum_{q_1}\sum_{q_2}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} T(k_1,q_1)\,U(k_2,q_2) \qquad (6.206)$$

一方（6.198）式から

$$\langle \alpha',j'||X^{(k)}||\alpha,j\rangle = (2k+1)\sum_{m}\sum_{m'}(-1)^{j'-m'}$$

$$\times\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}\langle \alpha',j',m'|X(k,q)|\alpha,j,m\rangle$$

$$= (2k+1)\sum_{m}\sum_{m'}(-1)^{j'-m'}\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}(2j'+1)^{1/2}(2j+1)^{1/2}(2k+1)^{1/2}$$

$$\times\sum_{m_1'}\sum_{m_2'}\sum_{q_1}\sum_{q_2}\sum_{m_1}\sum_{m_2}(-1)^{j_1'-j_2'+m'}(-1)^{j_1-j_2+m}(-1)^{k_1-k_2+q}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_1' & j_2' & j' \\ m_1' & m_2' & -m' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$$

$$\times\langle \alpha_1',j_1',m_1'|T(k_1,q_1)|\alpha_1,j_1,m_1\rangle\langle \alpha_2',j_2',m_2'|U(k_2,q_2)|\alpha_2,j_2,m_2\rangle$$

$$= (2k+1)\sum_{m}\sum_{m'}(-1)^{j'-m'}\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}(2j'+1)^{1/2}(2j+1)^{1/2}(2k+1)^{1/2}$$

$$\times\sum_{m_1'}\sum_{m_2'}\sum_{q_1}\sum_{q_2}\sum_{m_1}\sum_{m_2}(-1)^{j_1'-j_2'+m'}(-1)^{j_1-j_2+m}(-1)^{k_1-k_2+q}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_1' & j_2' & j' \\ m_1' & m_2' & -m' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$$

$$\times(-1)^{j_1'-m_1'}\langle \alpha_1',j_1'||T^{(k_1)}||\alpha_1,j_1\rangle\begin{pmatrix} j_1' & k_1 & j_1 \\ -m_1' & q_1 & m_1 \end{pmatrix}$$

$$\times(-1)^{j_2'-m_2'}\langle\alpha_2',j_2'||U^{(k_2)}||\alpha_2,j_2\rangle\begin{pmatrix} j_2' & k_2 & j_2 \\ -m_2' & q_2 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$= [(2j'+1)(2j+1)(2k+1)]^{1/2}\langle\alpha_1',j_1'||T^{(k_1)}||\alpha_1,j_1\rangle\langle\alpha_2',j_2'||U^{(k_2)}||\alpha_2,j_2\rangle$$

$$\times\sum_{m'}\sum_{m}\sum_{q}\sum_{m_1'}\sum_{m_1}\sum_{q_1}\sum_{m_2'}\sum_{m_2}\sum_{q_2}$$

$$\begin{pmatrix} j_1' & j_2' & j' \\ -m_1' & -m_2' & m' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} j_1' & j_1 & k_1 \\ -m_1' & m_1 & q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2' & j_2 & k_2 \\ -m_2' & m_2 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j' & j & k \\ m' & -m & -q \end{pmatrix}$$

$$= [(2j'+1)(2j+1)(2k+1)]^{1/2}$$

$$\times\langle\alpha_1',j_1'||T^{(k_1)}||\alpha_1,j_1\rangle\langle\alpha_2',j_2'||U^{(k_2)}||\alpha_2,j_2\rangle\begin{Bmatrix} j_1' & j_2' & j' \\ j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \end{Bmatrix} \tag{6.207}$$

6.30　証明：n 電子系のスピン関数の数

$\hat{S}_Z$ の固有値が M_S に等しい固有関数の数を数える。この数は、明らかに $f_S^{(n)}$ を $S \geq |M_S|$ の範囲で総和したもの、

$$f_{|M_S|}^{(n)} + f_{|M_S|+1}^{(n)} + \cdots + f_{n/2}^{(n)} \tag{6.208}$$

に等しい。一方、この数は $\alpha(1)\beta(2)\cdots\alpha(n)$ のような積で α が $n/2+M_S$ 個、β が $n/2-M_S$ 個含まれるものの数に等しい。すなわち

$$\begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2}+M_S \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n/2-M_S)!\,(n/2+M_S)!} = \frac{n!}{(n/2-|M_S|)!\,(n/2+|M_S|)!} \tag{6.209}$$

に等しい。(6.208) 式の階差と (6.209) 式の階差を等しいとおけば

$$f_{|M_S|}^{(n)} = \frac{n!}{(n/2-|M_S|)!\,(n/2+|M_S|)!} - \frac{n!}{(n/2-|M_S|-1)!\,(n/2+|M_S|+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(2|M_S|+1)}{(n/2+|M_S|+1)!\,(n/2-|M_S|)!} \tag{6.210}$$

$|M_S|$ を S で書き換えれば

$$f_S^{(n)} = \frac{n!\,(2S+1)}{(n/2+S+1)!\,(n/2-S)!} \tag{6.211}$$

6.31 証明：電子スピンの分子固定方向成分の固有関数

$$
\begin{aligned}
&\hat{S}_z|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \\
&= (\Phi_{Zz}\hat{S}_Z + \Phi_{Xz}\hat{S}_X + \Phi_{Yz}\hat{S}_Y)\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}|S,M_S\rangle \\
&= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}\Big[\Phi_{Zz}\hat{S}_Z|S,M_S\rangle \\
&\quad +\frac{1}{2}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})(\hat{S}_X - i\hat{S}_Y)|S,M_S\rangle + \frac{1}{2}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})(\hat{S}_X + i\hat{S}_Y)|S,M_S\rangle\Big] \\
&= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}\Big[\Phi_{Zz}M_S|S,M_S\rangle \\
&\quad +\frac{1}{2}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S-1)}|S,M_S-1\rangle \\
&\quad +\frac{1}{2}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S+1)}|S,M_S+1\rangle\Big] \\
&= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Big[\Phi_{Zz}\Psi_{S,-M_S,-K_S}M_S \\
&\quad -\frac{1}{2}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})\Psi_{S,-M_S-1,-K_S}\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S+1)} \\
&\quad -\frac{1}{2}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})\Psi_{S,-M_S+1,-K_S}\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S-1)}\Big]|S,M_S\rangle
\end{aligned}
\tag{6.212}
$$

ここで (2.145) 及び (2.146) を用いて

$$
\begin{aligned}
&\hat{S}_z|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \\
&= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sqrt{\frac{8\pi^2}{3}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Big[\Psi_{1,0,0}\Psi_{S,-M_S,-K_S}M_S \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{1,1,0}\Psi_{S,-M_S-1,-K_S}\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S+1)} \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{1,-1,0}\Psi_{S,-M_S+1,-K_S}\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S-1)}\Big]|S,M_S\rangle
\end{aligned}
\tag{6.213}
$$

また

$$
\langle 1,0,S,-M_S|S,-M_S\rangle = (-1)^{1-S-M_S}\sqrt{2S+1}\begin{pmatrix} 1 & S & S \\ 0 & -M_S & M_S \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{M_S}{\sqrt{S(S+1)}} \tag{6.214}
$$

$$
\langle 1,1,S,-M_S-1|S,-M_S\rangle = (-1)^{1-S-M_S}\sqrt{2S+1}\begin{pmatrix} 1 & S & S \\ 1 & -M_S-1 & M_S \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S+1)}}{\sqrt{2S(S+1)}} \tag{6.215}
$$

$$
\langle 1,-1,S,-M_S+1|S,-M_S\rangle = (-1)^{1-S-M_S}\sqrt{2S+1}\begin{pmatrix} 1 & S & S \\ -1 & -M_S+1 & M_S \end{pmatrix}
$$

$$
= -\frac{\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S-1)}}{\sqrt{2S(S+1)}} \tag{6.216}
$$

だから

$$
\hat{S}_z|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sqrt{\frac{8\pi^2}{3}}\sqrt{S(S+1)}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle
$$

$$
\times[\langle 1,0,S,-M_S|S,-M_S\rangle\Psi_{1,0,0}\Psi_{S,-M_S,-K_S}
$$

$$
+\langle 1,1,S,-M_S-1|S,-M_S\rangle\Psi_{1,1,0}\Psi_{S,-M_S-1,-K_S}
$$

$$
+\langle 1,-1,S,-M_S+1|S,-M_S\rangle\Psi_{1,-1,0}\Psi_{S,-M_S+1,-K_S}] \tag{6.217}
$$

最後の [ ] 内は

$$
\sum_{M_1}\sum_{M_2}\langle 1,M_1,S,M_2|S,-M_S\rangle\Psi_{1,M_1,0}\Psi_{S,M_2,-K_S}
$$

$$
= \sum_K(-1)^{1-S+K}\sqrt{\frac{3(2S+1)}{8\pi^2}}\begin{pmatrix} 1 & S & S \\ 0 & -K_S & -K \end{pmatrix}\Psi_{S,-M_S,K}
$$

$$
= (-1)^{1-S-K_S}\sqrt{\frac{3(2S+1)}{8\pi^2}}\begin{pmatrix} 1 & S & S \\ 0 & -K_S & K_S \end{pmatrix}\Psi_{S,-M_S,-K_S}
$$

$$
= \sqrt{\frac{3}{8\pi^2}}[S(S+1)]^{-1/2}K_S\Psi_{S,-M_S,-K_S} \tag{6.218}
$$

となる。ただし、(3.62) 式を用いて変形した。よって

$$
\hat{S}_z|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}K_S\Psi_{S,-M_S,-K_S}|S,M_S\rangle
$$

$$= K_S|S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.219}$$

次に

$$(\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y)|S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} \Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$\times[(\Phi_{Zx} \pm i\Phi_{Zy})\hat{S}_Z + (\Phi_{Xx} \pm i\Phi_{Xy})\hat{S}_X + (\Phi_{Yx} \pm i\Phi_{Yy})\hat{S}_Y]|S, M_S\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} \Psi_{S,-M_S,-K_S} \Big[(\Phi_{Zx} \pm i\Phi_{Zy})\hat{S}_Z|S, M_S\rangle$$

$$+\frac{1}{2}(\Phi_{Xx} \pm i\Phi_{Xy} + i\Phi_{Yx} \mp \Phi_{Yy})(\hat{S}_X - i\hat{S}_Y)|S, M_S\rangle$$

$$+\frac{1}{2}(\Phi_{Xx} \pm i\Phi_{Xy} - i\Phi_{Yx} \pm \Phi_{Yy})(\hat{S}_X + i\hat{S}_Y)|S, M_S\rangle\Big]$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} \Psi_{S,-M_S,-K_S} \Big[(\Phi_{Zx} \pm i\Phi_{Zy})M_S|S, M_S\rangle$$

$$+\frac{1}{2}(\Phi_{Xx} \pm i\Phi_{Xy} + i\Phi_{Yx} \mp \Phi_{Yy})\sqrt{S(S+1) - M_S(M_S-1)}|S, M_S - 1\rangle$$

$$+\frac{1}{2}(\Phi_{Xx} \pm i\Phi_{Xy} - i\Phi_{Yx} \pm \Phi_{Yy})\sqrt{S(S+1) - M_S(M_S+1)}|S, M_S + 1\rangle\Big]$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} |S, M_S\rangle \Big[(\Phi_{Zx} \pm i\Phi_{Zy})\Psi_{S,-M_S,-K_S} M_S$$

$$-\frac{1}{2}(\Phi_{Xx} \pm i\Phi_{Xy} + i\Phi_{Yx} \mp \Phi_{Yy})\Psi_{S,-M_S-1,-K_S}\sqrt{S(S+1) - M_S(M_S+1)}$$

$$-\frac{1}{2}(\Phi_{Xx} \pm i\Phi_{Xy} - i\Phi_{Yx} \pm \Phi_{Yy})\Psi_{S,-M_S+1,-K_S}\sqrt{S(S+1) - M_S(M_S-1)}\Big] \tag{6.220}$$

ここで (2.147–2.149) 式を用いて

$$(\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y)|S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \pm\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sqrt{\frac{8\pi^2}{3}}$$

$$\times \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} |S, M_S\rangle [\sqrt{2}\Psi_{1,0,\mp 1}\Psi_{S,-M_S,-K_S} M_S$$

$$+\Psi_{1,1,\mp 1}\Psi_{S,-M_S-1,-K_S}\sqrt{S(S+1) - M_S(M_S+1)}$$

$$-\Psi_{1,-1,\mp 1}\Psi_{S,-M_S+1,-K_S}\sqrt{S(S+1) - M_S(M_S-1)}]$$

$$= \pm\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sqrt{\frac{8\pi^2}{3}}\sqrt{2}\sqrt{S(S+1)}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle$$

$$\times[\langle 1,0,S,-M_S|S,-M_S\rangle\Psi_{1,0,\mp 1}\Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$+\langle 1,1,S,-M_S-1|S,-M_S\rangle\Psi_{1,1,\mp 1}\Psi_{S,-M_S-1,-K_S}$$

$$+\langle 1,-1,S,-M_S+1|S,-M_S\rangle\Psi_{1,-1,\mp 1}\Psi_{S,-M_S+1,-K_S}] \tag{6.221}$$

最後の [ ] 内は

$$\sum_{M_1}\sum_{M_2}\langle 1,M_1,S,M_2|S,-M_S\rangle\Psi_{1,M_1,\mp 1}\Psi_{S,M_2,-K_S}$$

$$= \sum_{K}(-1)^{1-S+K}\sqrt{\frac{3(2S+1)}{8\pi^2}}\begin{pmatrix} 1 & S & S \\ \mp 1 & -K_S & -K \end{pmatrix}\Psi_{S,-M_S,K}$$

$$= (-1)^{S+K_S}\sqrt{\frac{3(2S+1)}{8\pi^2}}\begin{pmatrix} 1 & S & S \\ \mp 1 & -K_S & K_S \pm 1 \end{pmatrix}\Psi_{S,-M_S,-K_S\mp 1}$$

$$= \mp\sqrt{\frac{3}{16\pi^2}}[S(S+1)]^{-1/2}\sqrt{S(S+1)-K_S(K_S\pm 1)}\Psi_{S,-M_S,-K_S\mp 1} \tag{6.222}$$

となる。よって

$$(\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y)|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S\mp 1-M_S}\sqrt{S(S+1)-K_S(K_S\pm 1)}\Psi_{S,-M_S,-K_S\mp 1}|S,M_S\rangle$$

$$= \sqrt{S(S+1)-K_S(K_S\pm 1)}|S,K_S\pm 1\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.223}$$

さらに [(2.51) 式参照]

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = S(S+1)|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.224}$$

6.32　証明：Case (a) 基底関数

$\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$ が (4.106–4.113) 式を満足することを示す。

$$\hat{S}_z\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \Psi_{J,M_J,K_J}\hat{S}_z|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \Psi_{J,M_J,K_J}K_S|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= K_S\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.225}$$

$$(\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y)\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \Psi_{J,M_J,K_J}(\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y)|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= \Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{S(S+1)-K_S(K_S\pm 1)}|S,K_S\pm 1\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= \sqrt{S(S+1)-K_S(K_S\pm 1)}\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\pm 1\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.226}$$

(2.51) 式と同様に

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = S(S+1)\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.227}$$

$$\hat{N}_z\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \hat{N}_z\Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}|S,M_S\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle\hat{N}_z\Psi_{J,M_J,K_J}\Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle$$

$$\times(\Psi_{S,-M_S,-K_S}\hat{N}_z\Psi_{J,M_J,K_J} + \Psi_{J,M_J,K_J}\hat{N}_z\Psi_{S,-M_S,-K_S})$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle(K_J-K_S)\Psi_{J,M_J,K_J}\Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$= (K_J-K_S)\Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}|S,M_S\rangle$$

$$= (K_J-K_S)\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.228}$$

$$\hat{J}_z\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \hat{N}_z\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} + \hat{S}_z\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= (K_J-K_S)\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} + K_S\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= K_J\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.229}$$

$$(\hat{N}_x \pm i\hat{N}_y)\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= (\hat{N}_x \pm i\hat{N}_y)\Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}|S,M_S\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle(\hat{N}_x \pm i\hat{N}_y)\Psi_{J,M_J,K_J}\Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle$$

$$\times[\Psi_{S,-M_S,-K_S}(\hat{N}_x \pm i\hat{N}_y)\Psi_{J,M_J,K_J} + \Psi_{J,M_J,K_J}(\hat{N}_x \pm i\hat{N}_y)\Psi_{S,-M_S,-K_S}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} |S, M_S\rangle \\
&\quad \times [\Psi_{S,-M_S,-K_S} \sqrt{J(J+1) - K_J(K_J \mp 1)} \Psi_{J,M_J,K_J \mp 1} \\
&\qquad + \Psi_{J,M_J,K_J} \sqrt{S(S+1) - K_S(K_S \pm 1)} \Psi_{S,-M_S,-K_S \mp 1}] \\
&= \sqrt{J(J+1) - K_J(K_J \mp 1)} \Psi_{J,M_J,K_J \mp 1} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} \Psi_{S,-M_S,-K_S} |S, M_S\rangle \\
&\quad + \sqrt{S(S+1) - K_S(K_S \pm 1)} \Psi_{J,M_J,K_J} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} \Psi_{S,-M_S,-K_S \mp 1} |S, M_S\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1) - K_J(K_J \mp 1)} \Psi_{J,M_J,K_J \mp 1} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \\
&\quad - \sqrt{S(S+1) - K_S(K_S \pm 1)} \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S \pm 1\rangle_{\mathrm{m}}
\end{aligned} \tag{6.230}
$$

(6.226)、(6.230) 式より

$$
\begin{aligned}
&(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y) \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \\
&= (\hat{N}_x \pm i\hat{N}_y) \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} + (\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y) \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \\
&= \sqrt{J(J+1) - K_J(K_J \mp 1)} \Psi_{J,M_J,K_J \mp 1} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}}
\end{aligned} \tag{6.231}
$$

(2.51) 式と同様に

$$
\hat{\boldsymbol{J}}^2 \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} = J(J+1) \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.232}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{J}_Z \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} = \hat{N}_Z \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} + \hat{S}_Z \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \\
&= \Psi_{J,M_J,K_J} \hat{N}_Z |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} + |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \hat{N}_Z \Psi_{J,M_J,K_J} + \Psi_{J,M_J,K_J} \hat{S}_Z |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \\
&= \Psi_{J,M_J,K_J} \hat{N}_Z \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} \Psi_{S,-M_S,-K_S} |S, M_S\rangle \\
&\quad + |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} M_J \Psi_{J,M_J,K_J} \\
&\quad + \Psi_{J,M_J,K_J} \hat{S}_Z \sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}} \sum_{M_S} (-1)^{K_S - M_S} \Psi_{S,-M_S,-K_S} |S, M_S\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle\hat{N}_Z\Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$+M_J\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$+\Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}\hat{S}_Z|S,M_S\rangle$$

$$= \Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle(-M_S)\Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$+M_J\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$+\Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}M_S|S,M_S\rangle$$

$$= M_J\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.233}$$

$$(\hat{J}_X \pm i\hat{J}_Y)\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= (\hat{N}_X \pm i\hat{N}_Y)\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} + (\hat{S}_X \pm i\hat{S}_Y)\Psi_{J,M_J,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= \Psi_{J,M_J,K_J}(\hat{N}_X \pm i\hat{N}_Y)|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} + |S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}(\hat{N}_X \pm i\hat{N}_Y)\Psi_{J,M_J,K_J}$$

$$+\Psi_{J,M_J,K_J}(\hat{S}_X \pm i\hat{S}_Y)|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= \Psi_{J,M_J,K_J}(\hat{N}_X \pm i\hat{N}_Y)\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}|S,M_S\rangle$$

$$+|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}\sqrt{J(J+1)-M_J(M_J\pm 1)}\Psi_{J,M_J\pm 1,K_J}$$

$$+\Psi_{J,M_J,K_J}(\hat{S}_X \pm i\hat{S}_Y)\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}|S,M_S\rangle$$

$$= \Psi_{J,M_J,K_J}\sum_{M_S}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle(\hat{N}_X \pm i\hat{N}_Y)\Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$+\sqrt{J(J+1)-M_J(M_J\pm 1)}\Psi_{J,M_J\pm 1,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$+\Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}(\hat{S}_X \pm i\hat{S}_Y)|S,M_S\rangle$$

$$= \Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}|S,M_S\rangle$$

$$\times\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S\mp1)}\Psi_{S,-M_S\pm1,-K_S}$$

$$+\sqrt{J(J+1)-M_J(M_J\pm1)}\Psi_{J,M_J\pm1,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$+\Psi_{J,M_J,K_J}\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{M_S}(-1)^{K_S-M_S}\Psi_{S,-M_S,-K_S}$$

$$\times\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S\pm1)}|S,M_S\pm1\rangle$$

$$=\sqrt{J(J+1)-M_J(M_J\pm1)}\Psi_{J,M_J\pm1,K_J}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}} \tag{6.234}$$

6.33 証明：Case (a) 基底関数と Case (b) 基底関数の関係

(4.83) 式の関係を (4.98) 式に代入すれば

$$|N,K_N,S,J,M_J\rangle=\sum_{M_N}\sum_{M_S}(-1)^{N-S+M_J}\sqrt{2J+1}\begin{pmatrix} N & S & J \\ M_N & M_S & -M_J \end{pmatrix}\Psi_{N,M_N,K_N}$$

$$\times\sqrt{\frac{8\pi^2}{2S+1}}\sum_{K_S}\Psi_{S,M_S,K_S}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$=\sum_{M_N}\sum_{M_S}\sum_{K_S}(-1)^{N-S+M_J}\sqrt{\frac{8\pi^2(2J+1)}{2S+1}}\begin{pmatrix} N & S & J \\ M_N & M_S & -M_J \end{pmatrix}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$\times\Psi_{N,M_N,K_N}\Psi_{S,M_S,K_S} \tag{6.235}$$

対称コマ固有関数の積の公式 (3.64) 式を用いて

$$|N,K_N,S,J,M_J\rangle$$

$$=\sum_{M_N}\sum_{M_S}\sum_{K_S}(-1)^{N-S+M_J}\sqrt{\frac{8\pi^2(2J+1)}{2S+1}}\begin{pmatrix} N & S & J \\ M_N & M_S & M_J \end{pmatrix}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$\times\sum_{J'}(-1)^{M_N+M_S-K_N-K_S}\sqrt{\frac{(2N+1)(2S+1)(2J'+1)}{8\pi^2}}$$

$$\times\begin{pmatrix} N & S & J' \\ M_N & M_S & -M_N-M_S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & S & J' \\ K_N & K_S & -K_N-K_S \end{pmatrix}\Psi_{J',M_N+M_S,K_N+K_S}$$

$$=\sum_{M_N}\sum_{M_S}\sum_{K_S}\sum_{M'}(-1)^{N-S+M_J}\sqrt{\frac{8\pi^2(2J+1)}{2S+1}}\begin{pmatrix} N & S & J \\ M_N & M_S & -M_J \end{pmatrix}|S,K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$\times \sum_{J'} (-1)^{M'-K_N-K_S} \sqrt{\frac{(2N+1)(2S+1)(2J'+1)}{8\pi^2}}$$

$$\times \begin{pmatrix} N & S & J' \\ M_N & M_S & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & S & J' \\ K_N & K_S & -K_N-K_S \end{pmatrix} \Psi_{J',M',K_N+K_S}$$

$$= \sum_{K_S} \sum_{J'} \sum_{M'} (-1)^{N-S+M_J} (-1)^{M'-K_N-K_S} \sqrt{(2J+1)(2N+1)(2J'+1)}$$

$$\times \begin{pmatrix} N & S & J' \\ K_N & K_S & -K_N-K_S \end{pmatrix} \Psi_{J',M',K_N+K_S} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$\times \sum_{M_N} \sum_{M_S} \begin{pmatrix} N & S & J \\ M_N & M_S & -M_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & S & J' \\ M_N & M_S & -M' \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{K_S} \sum_{J'} \sum_{M'} (-1)^{N-S+M_J} (-1)^{M'-K_N-K_S} \sqrt{(2J+1)(2N+1)(2J'+1)}$$

$$\times \begin{pmatrix} N & S & J' \\ K_N & K_S & -K_N-K_S \end{pmatrix} \Psi_{J',M',K_N+K_S} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} (2J+1)^{-1} \delta_{J,J'} \delta_{M_J,M'}$$

$$= \sum_{K_S} (-1)^{N-S+K_N+K_S} \sqrt{2N+1} \begin{pmatrix} N & S & J \\ K_N & K_S & -K_N-K_S \end{pmatrix}$$

$$\times \Psi_{J,M_J,K_N+K_S} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= \sqrt{2N+1} \sum_{K_J} \sum_{K_S} (-1)^{N-S+K_J} \begin{pmatrix} N & S & J \\ K_N & K_S & -K_J \end{pmatrix} \Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}} \qquad (6.236)$$

3-j 記号の直交関係 [(3.43) 式] を用いて

$$\Psi_{J,M_J,K_J} |S, K_S\rangle_{\mathrm{m}}$$

$$= \sum_{N} \sum_{K_N} \sqrt{2N+1} (-1)^{N-S+K_J} \begin{pmatrix} N & S & J \\ K_N & K_S & -K_J \end{pmatrix} |N, K_N, S, J, M_J\rangle \qquad (6.237)$$

6.34 証明：ユニタリー変換

$$\hat{J}'_X = \hat{U}^\dagger \hat{J}_X \hat{U} = \hat{U}^\dagger \hat{S}_X \hat{U} + \hat{U}^\dagger \hat{N}_X \hat{U} = \hat{S}'_X + \frac{1}{i} \exp(i\chi \hat{S}_Z) \exp(i\theta \hat{S}_Y) \exp(i\phi \hat{S}_Z)$$

$$\times \left[-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right] \exp(-i\phi \hat{S}_Z) \exp(-i\theta \hat{S}_Y) \exp(-i\chi \hat{S}_Z)$$

$$= \hat{S}'_X + \frac{1}{i} \left[-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right]$$

$$-\frac{1}{i} \sin\phi \exp(i\chi \hat{S}_Z) \exp(i\theta \hat{S}_Y) \exp(i\phi \hat{S}_Z)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\theta} \exp(-i\phi \hat{S}_Z) \exp(-i\theta \hat{S}_Y) \exp(-i\chi \hat{S}_Z)$$

$$+\frac{1}{i} \frac{\cos\phi}{\sin\theta} \exp(i\chi \hat{S}_Z) \exp(i\theta \hat{S}_Y) \exp(i\phi \hat{S}_Z)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\chi} \exp(-i\phi \hat{S}_Z) \exp(-i\theta \hat{S}_Y) \exp(-i\chi \hat{S}_Z)$$

$$-\frac{1}{i} \frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta} \exp(i\chi \hat{S}_Z) \exp(i\theta \hat{S}_Y) \exp(i\phi \hat{S}_Z)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\phi} \exp(-i\phi \hat{S}_Z) \exp(-i\theta \hat{S}_Y) \exp(-i\chi \hat{S}_Z)$$

$$= \hat{S}'_X + \frac{1}{i} \left[-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right]$$

$$+\sin\phi \exp(i\chi \hat{S}_Z) \exp(i\theta \hat{S}_Y) \exp(i\phi \hat{S}_Z)$$

$$\times \exp(-i\phi \hat{S}_Z) \hat{S}_Y \exp(-i\theta \hat{S}_Y) \exp(-i\chi \hat{S}_Z)$$

$$-\frac{\cos\phi}{\sin\theta} \exp(i\chi \hat{S}_Z) \exp(i\theta \hat{S}_Y) \exp(i\phi \hat{S}_Z)$$

$$\times \exp(-i\phi \hat{S}_Z) \exp(-i\theta \hat{S}_Y) \hat{S}_Z \exp(-i\chi \hat{S}_Z)$$

$$+\frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta} \exp(i\chi \hat{S}_Z) \exp(i\theta \hat{S}_Y) \exp(i\phi \hat{S}_Z)$$

$$\times \hat{S}_Z \exp(-i\phi \hat{S}_Z) \exp(-i\theta \hat{S}_Y) \exp(-i\chi \hat{S}_Z) \tag{6.238}$$

6.2 節の補足と同様にして

$$\exp(-i\phi \hat{S}_Z) \hat{S}_Y = (\cos\phi \hat{S}_Y - \sin\phi \hat{S}_X) \exp(-i\phi \hat{S}_Z) \tag{6.239}$$

$$\exp(-i\theta \hat{S}_Y) \hat{S}_Z = (\cos\theta \hat{S}_Z + \sin\theta \hat{S}_X) \exp(-i\theta \hat{S}_Y) \tag{6.240}$$

$$\exp(-i\phi\hat{S}_Z)\hat{S}_X = (\cos\phi\hat{S}_X + \sin\phi\hat{S}_Y)\exp(-i\phi\hat{S}_Z) \tag{6.241}$$

なる関係が導けるので

$$\begin{aligned}
\hat{J}'_X &= \hat{S}'_X + \frac{1}{i}\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] \\
&\quad + \sin\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\exp(i\phi\hat{S}_Z) \\
&\qquad \times(\cos\phi\hat{S}_Y - \sin\phi\hat{S}_X)\exp(-i\phi\hat{S}_Z)\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&\quad - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\exp(i\phi\hat{S}_Z) \\
&\qquad \times\exp(-i\phi\hat{S}_Z)(\cos\theta\hat{S}_Z + \sin\theta\hat{S}_X)\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&\quad + \frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta}\hat{S}'_Z \\
&= \hat{S}'_X + \frac{1}{i}\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] + \sin\phi(\cos\phi\hat{S}'_Y - \sin\phi\hat{S}'_X) \\
&\quad - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\exp(i\phi\hat{S}_Z) \\
&\qquad \times[\cos\theta\hat{S}_Z + \sin\theta(\cos\phi\hat{S}_X + \sin\phi\hat{S}_Y)]\exp(-i\phi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&\quad + \frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta}\hat{S}'_Z \\
&= \hat{S}'_X + \frac{1}{i}\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] + \sin\phi(\cos\phi\hat{S}'_Y - \sin\phi\hat{S}'_X) \\
&\quad - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}[\cos\theta\hat{S}'_Z + \sin\theta(\cos\phi\hat{S}'_X + \sin\phi\hat{S}'_Y)] + \frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta}\hat{S}'_Z \\
&= \frac{1}{i}\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.242}$$

$\hat{J}'_Y$ も同様。

$$\begin{aligned}
\hat{S}'_Z &= \exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\exp(i\phi\hat{S}_Z)\hat{S}_Z\exp(-i\phi\hat{S}_Z)\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\hat{S}_Z\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \exp(i\chi\hat{S}_Z)(\cos\theta\hat{S}_Z - \sin\theta\hat{S}_X)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \cos\theta\hat{S}_Z - \sin\theta\exp(i\chi\hat{S}_Z)\hat{S}_X\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \cos\theta\hat{S}_Z - \sin\theta(\cos\chi\hat{S}_X - \sin\chi\hat{S}_Y)
\end{aligned}$$

$$= \Phi_{Zz}\hat{S}_Z + \Phi_{Zx}\hat{S}_X + \Phi_{Zy}\hat{S}_Y \tag{6.243}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}'_X &= \exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\exp(i\phi\hat{S}_Z)\hat{S}_X\exp(-i\phi\hat{S}_Z)\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)(\cos\phi\hat{S}_X - \sin\phi\hat{S}_Y)\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \cos\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\hat{S}_X\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&\quad - \sin\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)\hat{S}_Y\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \cos\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)(\cos\theta\hat{S}_X + \sin\theta\hat{S}_Z)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) - \sin\phi(\cos\chi\hat{S}_Y + \sin\chi\hat{S}_X) \\
&= \cos\theta\cos\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)\hat{S}_X\exp(-i\chi\hat{S}_Z) + \sin\theta\cos\phi\hat{S}_Z \\
&\quad - \sin\phi(\cos\chi\hat{S}_Y + \sin\chi\hat{S}_X) \\
&= \cos\theta\cos\phi(\cos\chi\hat{S}_X - \sin\chi\hat{S}_Y) + \sin\theta\cos\phi\hat{S}_Z - \sin\phi(\cos\chi\hat{S}_Y + \sin\chi\hat{S}_X) \\
&= \Phi_{Xz}\hat{S}_Z + \Phi_{Xx}\hat{S}_X + \Phi_{Xy}\hat{S}_Y
\end{aligned} \tag{6.244}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}'_Y &= \exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\exp(i\phi\hat{S}_Z)\hat{S}_Y\exp(-i\phi\hat{S}_Z)\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)(\cos\phi\hat{S}_Y + \sin\phi\hat{S}_X)\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \cos\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)\hat{S}_Y\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&\quad + \sin\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)\exp(i\theta\hat{S}_Y)\hat{S}_X\exp(-i\theta\hat{S}_Y)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \cos\phi(\cos\chi\hat{S}_Y + \sin\chi\hat{S}_X) + \sin\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)(\cos\theta\hat{S}_X + \sin\theta\hat{S}_Z)\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&= \cos\phi(\cos\chi\hat{S}_Y + \sin\chi\hat{S}_X) + \cos\theta\sin\phi\exp(i\chi\hat{S}_Z)\hat{S}_X\exp(-i\chi\hat{S}_Z) \\
&\quad + \sin\theta\sin\phi\hat{S}_Z \\
&= \cos\phi(\cos\chi\hat{S}_Y + \sin\chi\hat{S}_X) + \cos\theta\sin\phi(\cos\chi\hat{S}_X - \sin\chi\hat{S}_Y) + \sin\theta\sin\phi\hat{S}_Z \\
&= \Phi_{Yz}\hat{S}_Z + \Phi_{Yx}\hat{S}_X + \Phi_{Yy}\hat{S}_Y
\end{aligned} \tag{6.245}$$

ただし、6.2 節の補足と同様にして導かれる

$$\exp(i\theta\hat{S}_Y)\hat{S}_Z\exp(-i\theta\hat{S}_Y) = \cos\theta\hat{S}_Z - \sin\theta\hat{S}_X \tag{6.246}$$

$$\exp(i\theta\hat{S}_Y)\hat{S}_X\exp(-i\theta\hat{S}_Y) = \cos\theta\hat{S}_X + \sin\theta\hat{S}_Z \tag{6.247}$$

$$\exp(i\chi\hat{S}_Z)\hat{S}_X\exp(-i\chi\hat{S}_Z) = \cos\chi\hat{S}_X - \sin\chi\hat{S}_Y \tag{6.248}$$

$$\exp(i\chi\hat{S}_Z)\hat{S}_Y\exp(-i\chi\hat{S}_Z) = \cos\chi\hat{S}_Y + \sin\chi\hat{S}_X \tag{6.249}$$

などを用いた。

6.35 証明：電子スピン・核スピン双極子相互作用

$$T(1,q)=\sum_{q_1}\sum_{q_2}\langle 2,q_1,1,q_2|1,q\rangle\Psi_{2,q_1,0}S^{(1)}_{q_2} \tag{6.250}$$

よって

$$T(1,0)=\langle 2,1,1,-1|1,0\rangle\Psi_{2,1,0}S^{(1)}_{-1}+\langle 2,0,1,0|1,0\rangle\Psi_{2,0,0}S^{(1)}_{0}$$

$$+\langle 2,-1,1,1|1,0\rangle\Psi_{2,-1,0}S^{(1)}_{1}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{10}}(-1)\sqrt{\frac{15}{16\pi^2}}\Phi_{Zz}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})\sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{S}_X-i\hat{S}_Y)$$

$$-\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{5}{32\pi^2}}(3\Phi_{Zz}^2-1)\Psi_{2,0,0}\hat{S}_Z$$

$$+\sqrt{\frac{3}{10}}\sqrt{\frac{15}{16\pi^2}}\Phi_{Zz}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})(-1)\sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{S}_X+i\hat{S}_Y)$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{16\pi^2}}\left[3\Phi_{Zz}\Phi_{Xz}\hat{S}_X+(3\Phi_{Zz}^2-1)\hat{S}_Z+3\Phi_{Zz}\Phi_{Yz}\hat{S}_Y\right] \tag{6.251}$$

$$T(1,1)=\langle 2,2,1,-1|1,1\rangle\Psi_{2,2,0}S^{(1)}_{-1}+\langle 2,1,1,0|1,1\rangle\Psi_{2,1,0}S^{(1)}_{0}$$

$$+\langle 2,0,1,1|1,1\rangle\Psi_{2,0,0}S^{(1)}_{1}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{15}{64\pi^2}}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})^2\sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{S}_X-i\hat{S}_Y)$$

$$-\sqrt{\frac{3}{10}}(-1)\sqrt{\frac{15}{16\pi^2}}\Phi_{Zz}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})S_Z$$

$$+\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{\frac{5}{32\pi^2}}(3\Phi_{Zz}^2-1)(-1)\sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{S}_X+i\hat{S}_Y)$$

$$=\sqrt{\frac{1}{32\pi^2}}\left[\frac{3}{2}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})^2(\hat{S}_X-i\hat{S}_Y)+3\Phi_{Zz}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})S_Z\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(3\Phi_{Zz}^2-1)(\hat{S}_X+i\hat{S}_Y)\right] \tag{6.252}$$

$$T(1,-1)=\langle 2,0,1,-1|1,-1\rangle\Psi_{2,0,0}S^{(1)}_{-1}+\langle 2,-1,1,0|1,-1\rangle\Psi_{2,-1,0}S^{(1)}_{0}$$

$$+\langle 2,-2,1,1|1,-1\rangle\Psi_{2,-2,0}S^{(1)}_{1}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{\frac{5}{32\pi^2}}(3\Phi_{Zz}^2-1)\sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{S}_X-i\hat{S}_Y)$$

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{\frac{3}{10}}\sqrt{\frac{15}{16\pi^2}}\Phi_{Zz}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})S_Z \\
&+\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{15}{64\pi^2}}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})^2(-1)\sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{S}_X+i\hat{S}_Y) \\
=&\sqrt{\frac{1}{32\pi^2}}\left[\frac{1}{2}(3\Phi_{Zz}^2-1)(\hat{S}_X-i\hat{S}_Y)-3\Phi_{Zz}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})S_Z\right. \\
&\left.-\frac{3}{2}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})^2(\hat{S}_X+i\hat{S}_Y)\right] \qquad (6.253)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&T(1,0)I_0^{(1)}-T(1,1)I_{-1}^{(1)}-T(1,-1)I_1^{(1)} \\
=&-\sqrt{\frac{1}{16\pi^2}}\left\{\left[3\Phi_{Zz}\Phi_{Xz}\hat{S}_X+(3\Phi_{Zz}^2-1)\hat{S}_Z+3\Phi_{Zz}\Phi_{Yz}\hat{S}_Y\right]I_Z\right. \\
&+\left[\frac{3}{4}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})^2(\hat{S}_X-i\hat{S}_Y)+\frac{3}{2}\Phi_{Zz}(\Phi_{Xz}+i\Phi_{Yz})S_Z\right. \\
&\quad\left.-\frac{1}{4}(3\Phi_{Zz}^2-1)(\hat{S}_X+i\hat{S}_Y)\right](\hat{I}_X-i\hat{I}_Y) \\
&+\left[-\frac{1}{4}(3\Phi_{Zz}^2-1)(\hat{S}_X-i\hat{S}_Y)+\frac{3}{2}\Phi_{Zz}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})S_Z\right. \\
&\quad\left.\left.+\frac{3}{4}(\Phi_{Xz}-i\Phi_{Yz})^2(\hat{S}_X+i\hat{S}_Y)\right](\hat{I}_X+i\hat{I}_Y)\right\} \\
=&-\sqrt{\frac{1}{16\pi^2}}\left[(3\Phi_{Zz}^2-1)\hat{S}_Z\hat{I}_Z+3\Phi_{Zz}\Phi_{Xz}\hat{S}_Z\hat{I}_X+3\Phi_{Zz}\Phi_{Yz}\hat{S}_Z\hat{I}_Y\right. \\
&+3\Phi_{Zz}\Phi_{Xz}\hat{S}_X\hat{I}_Z+(3\Phi_{Xz}^2-1)\hat{S}_X\hat{I}_X+3\Phi_{Xz}\Phi_{Yz}\hat{S}_X\hat{I}_Y \\
&\left.+3\Phi_{Zz}\Phi_{Yz}\hat{S}_Y\hat{I}_Z+3\Phi_{Xz}\Phi_{Yz}\hat{S}_Y\hat{I}_X+(3\Phi_{Yz}^2-1)\hat{S}_Y\hat{I}_Y\right] \qquad (6.254)
\end{aligned}
$$